Partie A

Restitution organisée de connaissances On supposera connus les résultats suivants :

- $e^0 = 1$.
- Pour tous réels x et y, $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1. Démontrer que pour tout réel x, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n, $(e^x)^n = e^{nx}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$.

1. *a.* Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.

b. Calculer u_1. En déduire u_0.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

3. *a.* Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

CORRECTION

Partie A

1. En choisissant $y = -x$: $e^x \times e^y = e^{x+y}$ devient :
$e^x \times e^{-x} = e^{x-x}$ soit $e^x \times e^{-x} = e^0$
donc $e^x \times e^{-x} = 1$ donc $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

2. Montrons par récurrence que pour tout réel x et pour tout entier naturel n : $(e^x)^n = e^{nx}$.
Si $n = 0$, $(e^x)^0 = 1 = e^0 = e^{0x}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Montrons que pour tout n, la propriété est héréditaire soit que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $(e^x)^n = e^{nx}$ alors $(e^x)^{n+1} = e^{(n+1)x}$
$(e^x)^{n+1} = (e^x)^n \times e^x = e^{nx} \times e^x = e^{nx+x} = e^{(n+1)x}$
La propriété est héréditaire pour tout n donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

Partie B

1. *a.* $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-0x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx$

$u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$

donc $u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$

$u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) dx$

donc $u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1$

b. la fonction $x \to \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ est de la forme $-\dfrac{u'}{u}$ où $u(x) = 1 + e^{-x}$ donc une primitive de la fonction $x \to \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ est la fonction $x \to -\ln(1 + e^{-x})$
donc $u_1 = -\ln(1 + e^{-1}) + \ln(1 + e^0) = \ln 2 - \ln(1 + e^{-1})$
$u_0 = 1 - u_1 = 1 + \ln(1 + e^{-1}) - \ln 2$

2. La fonction $x \to \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ est continue positive sur $\mathbb{R}$ et $0 < 1$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx \geq 0$ soit pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

3. *a.* $u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$

$\Leftrightarrow u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\right) dx$

$u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x} + e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$

$\Leftrightarrow u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(e^{-x}+1)\,e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$

$\Leftrightarrow u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx = \left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1$

$u_{n+1} + u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

b. pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq 0$ donc $u_n \leq u_{n+1} + u_n$ or $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

donc pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

4. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$ or pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$ donc d'après le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.