Soient (a_n) et (b_n) deux suites vérifiant, pour tout nombre entier n, $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$, $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n b_n}{a_n + b_n} \end{cases}$

1. a. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2(a_n + b_n)}$.

b. Que peut-on dire du signe $a_n - b_n$ pour $n \geq 1$?

2. Démontrer que les suites a_n et b_n sont décroissantes à partir du rang 1.

3. Démontrer que les suites a_n et b_n sont convergentes

4. Démontrer que les suites a_n et b_n convergent vers une même limite.

CORRECTION

Soient (a_n) et (b_n) deux suites vérifiant, pour tout nombre entier n, $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$, $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n b_n}{a_n + b_n} \end{cases}$

1. a. Pour tout nombre entier naturel n, $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} - \dfrac{a_n b_n}{a_n + b_n}$.

$a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{(a_n + b_n)^2}{2(a_n + b_n)} - \dfrac{2 a_n b_n}{2(a_n + b_n)} = \dfrac{a_n^2 + 2 a_n b_n + b_n^2 - 2 a_n b_n}{2(a_n + b_n)}$ donc $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2(a_n + b_n)}$.

b. Montrons par récurrence que pour tout n de N, $a_n > 0$ et $b_n > 0$

Initialisation : $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$ donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$

Hérédité : Montrons pour tout n de N que si $a_n > 0$ et $b_n > 0$ alors $a_{n+1} > 0$ et $b_{n+1} > 0$.

$a_n > 0$ et $b_n > 0$ donc leur somme et leur produit sont strictement positifs donc $a_n + b_n > 0$ et $a_n b_n > 0$ donc

$\dfrac{a_n + b_n}{2} > 0$ et $\dfrac{a_n b_n}{a_n + b_n} > 0$ soit $a_{n+1} > 0$ et $b_{n+1} > 0$.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de N, $a_n > 0$ et $b_n > 0$

donc $\dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2(a_n + b_n)} > 0$ (quotient de termes strictement positifs donc pour tout n de N : $a_{n+1} - b_{n+1} > 0$

Pour tout $n \geq 1$, $a_n - b_n > 0$

2. Démontrer que les suites a_n et b_n sont décroissantes à partir du rang 1.

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} = -\dfrac{a_n - b_n}{2}$

A partir du rang 1, $a_n - b_n > 0$ donc $a_{n+1} - a_n < 0$. La suite (a_n) est strictement décroissante à partir du rang 1

$b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n b_n}{a_n + b_n} - b_n = \dfrac{-b_n}{a_n + b_n}$, $b_n > 0$ et $a_n + b_n > 0$ donc $b_{n+1} - b_n < 0$.

La suite (b_n) est strictement décroissante à partir du rang 1

3. Les suites (a_n) et (b_n) sont décroissantes, minorées par 0 donc sont convergentes.

4. Soit ℓ la limite de la suite (a_n) et ℓ' la limite de la suite (b_n)

$a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ soit $2 a_{n+1} = a_n + b_n$ donc en passant à la limite : $2\ell = \ell + \ell'$ soit $\ell = \ell'$

Les suites a_n et b_n convergent vers une même limite.