Liban mai 2014

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = (1 + \mathrm{i})\, z_n$.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer un en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.

Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Entrée	u est un réel
	p est un réel
	n est un entier
Initialisation	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 2
Entrée	Demander la valeur de p
Traitement	
Sortie :	

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + \mathrm{i}$.

En déduire la forme exponentielle de z_1.

3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

ANNEXE

Variables	:	b, b', x, y sont des réels
		k est un entier naturel
Initialisation	:	Affecter à b la valeur 0
		Affecter à b' la valeur 0,05
		Affecter à k la valeur 0
		Affecter à x la valeur 0,95
		Affecter à y la valeur 0,8
Traitement	:	Tant que $b < b'$ faire :
		Affecter à k la valeur $k+1$
		Affecter à b la valeur b'
		Affecter à x la valeur $0{,}95x$
		Affecter à y la valeur $0{,}80y$
		Affecter à b' la valeur $\cdots\cdots$
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher $\cdots\cdots$

	k	b	x	y	b'	Test : $b < b'$?
Après le 7ᵉ passage dans la boucle Tant que	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	VRAI
Après le 8ᵉ passage éventuel dans la boucle Tant que						
Après le 9ᵉ passage éventuel dans la boucle Tant que						

CORRECTION

Partie A

1. $u_0 = |z_0| = \left|\sqrt{3} - \mathrm{i}\right| = 2$

2. $z_{n+1} = (1 + \mathrm{i})\, z_n$ donc $u_{n+1} = |1 + \mathrm{i}|\, u_n$ or $|1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$ donc $u_{n+1} = \sqrt{2}\, u_n$

(u_n) est la suite géométrique de raison $q = \sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$.

3. Pour tout entier naturel n, $u_n = q^n u_0 = 2\left(\sqrt{2}\right)^n$

4. $\sqrt{2} > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

5.

Entrée	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	Demander la valeur de p
Traitement	Tant que $u < p$ faire n prend la valeur $n + 1$ u prend la valeur $u\sqrt{2}$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

Partie B

1. $z_1 = (1 + \mathrm{i})\, z_0 = (1 + \mathrm{i})\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right) = \sqrt{3} - \mathrm{i} + \mathrm{i}\sqrt{3} + 1$ donc $z_1 = \sqrt{3} + 1 + \mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right)$

2. $|z_0| = 2$ donc $z_0 = 2(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ donc $\begin{cases} 2\cos\theta = \sqrt{3} \\ 2\sin\theta = -1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

de même

$|1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$ donc $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ donc $\begin{cases} \sqrt{2}\cos\theta = 1 \\ \sqrt{2}\sin\theta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

$z_0 = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ donc $z_1 = (1 + \mathrm{i})\, z_0 = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ donc $z_1 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)}$ donc $z_1 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.

$2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \sqrt{3} + 1 + \mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right)$ donc $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3} + 1 + \mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

En égalant les parties réelles : $2\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{12} = \sqrt{3} + 1$ soit $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$