Métropole & La Réunion septembre 2008

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.

On considère le point A d'affixe $z_A = 1$.

Partie A

k est un réel strictement positif ; f est la similitude directe de centre O de rapport k et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On note $A_0 = A$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = f(A_n)$.

1\. *a*. Étant donné un point M d'affixe z, déterminer en fonction de z l'affixe z' du point M′ image de M par f.

b. Construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 dans le cas particulier où k est égal à $\frac{1}{2}$.

2\. *a*. Démontrer par récurrence que pour tout entier n, l'affixe z_n du point A_n est égale à $k^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$.

b. En déduire les valeurs de n pour lesquelles le point A_n appartient à la demi droite $(O ; \vec{u})$ et, dans ce cas, déterminer en fonction de k et de n l'abscisse de A_n.

Partie B

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Désormais, k désigne un entier naturel non nul.

1\. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.

2\. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.

3\. Pour quelles valeurs des entiers n et k le point A_n appartient-il à la demi droite $(O ; \vec{u})$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 ?

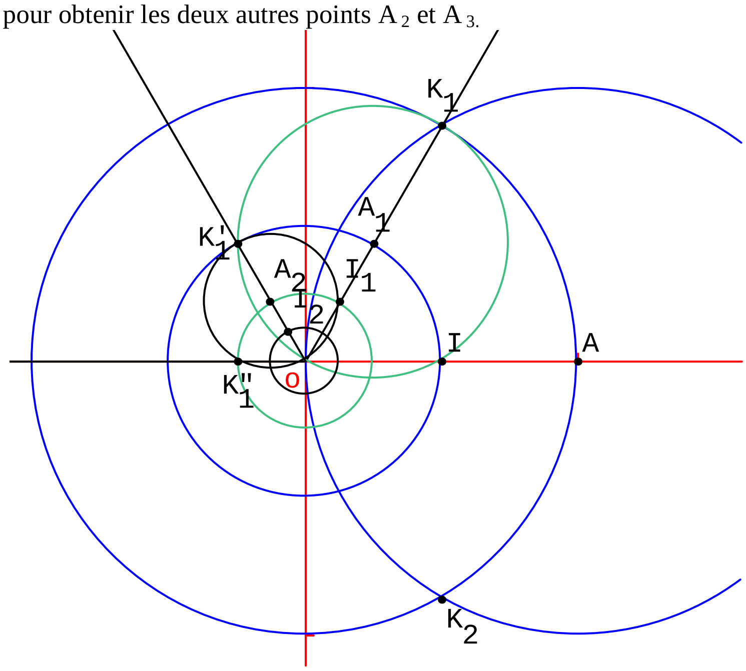
CORRECTION

1\. *a*. $z' = k\, e^{i\frac{\pi}{3}} z$

1\. *b*. Pour construire A_1, il faut construire le cercle de centre O de rayon OA, puis le cercle de même rayon de centre A qui coupe le premier en deux points K_1 et K_2 ce qui permet de construire une demi-droite $[OK_1)$ telle que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OK_1}) = \frac{\pi}{3}$

Soit I le milieu de [OA], le cercle de centre O de rayon OI coupe la demi-droite $[OK_1)$ en un point A_1 tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_1}) = \frac{\pi}{3}$ et $OA_1 = \frac{1}{2} OA$.

Il faut reprendre la construction pour obtenir les deux autres points A_2 et A_3.



2\. *a*. A_0 a pour affixe 1 soit $k^0 e^{i\frac{0\times\pi}{3}}$. La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que la propriété est héréditaire pour tout n de $\mathbb{N}$ c'est-à-dire que si $a_n = k^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$ alors $a_{n+1} = k^{n+1} e^{i\frac{(n+1)\pi}{3}}$.

$a_{n+1} = k\, e^{i\frac{\pi}{3}} a_n$ or $a_n = k^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$ donc $a_{n+1} = k^{n+1} e^{i\frac{(n+1)\pi}{3}}$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. A_n appartient à la demi droite $(O ; \vec{u}) \Leftrightarrow \arg(a_n) = 2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{n\pi}{3} = 2m\pi$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$

A_n appartient à la demi droite $(O ; \vec{u}) \Leftrightarrow n = 6m$ avec $m \in \mathbb{N}$

Si $n = 6m$ avec $m \in \mathbb{N}$ alors $e^{i\frac{n\pi}{3}} = 1$ donc $a_n = k^{6m}$

Partie B

1. $2008 = 8 \times 251$

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ne divisent pas 251 et $17^2 > 251$ donc 251 est un nombre premier
la décomposition en facteurs premiers de 2008 est $2^3 \times 251$

2. Si k^6 est un multiple de 2008, il existe un entier q tel que $k^6 = 2008 \times q = 2^3 \times 251 \times q$ donc 2 et 251 divisent k^6

2 et 251 sont des nombres premiers donc 2 et 251 divisent k
Le plus petit entier multiple de 2 et de 251 est $2 \times 251 = 502$
$(2 \times 251)^6 = 2^6 \times 251^6 = 2008 \times 2^3 \times 251^5$ donc 502^6 est un multiple de 2008 et c'est le plus petit entier possible.

3. A_n appartient à la demi droite $(O ; \vec{u}) \Leftrightarrow n = 6m$ avec $m \in \mathbb{N}$

$a_n = k^{6m}$ est un nombre entier multiple de 2008 si et seulement si k^6 est un multiple de 2008
soit si n est un multiple de 6 et k un multiple de 502