

Les numéros ISBN permettent d'identifier, de manière unique, chaque monographie quel qu'en soit le support : imprimé (livre,...) ou multimédia (CD-rom, DVD-rom,...).

Depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2007, le numéro ISBN est composé de 13 chiffres, répartis en 5 segments.

Par exemple, le numéro ISBN d'un manuel est 978-2-09-172664-9, les chiffres utilisés résument certaines caractéristiques de l'objet identifié. Le dernier chiffre d'un code ISBN correspond à la clé de contrôle, qui est donc ici égale à 9. Comme ces numéros peuvent être assez long, cette clé permet de détecter (pas toujours) des erreurs éventuelles de saisie.

$C_1, C_2, \dots, C_{13}$  est l'écriture dans le système décimal du numéro ISBN d'un livre, sachant que  $C_1, C_2, \dots, C_{13}$  sont des entiers naturels compris entre 0 et 9. La clé de contrôle  $C_{13}$  (dernier chiffre) est calculée en fonction des douze premiers chiffres :

$$S = (C_1 + C_3 + C_5 + C_7 + C_9 + C_{11}) + 3(C_2 + C_4 + C_6 + C_8 + C_{10} + C_{12})$$

Les chiffres d'indices impairs sont pondérés par 1 et les chiffres pairs par 3.

On calcule le reste  $r$  dans la division euclidienne de  $S$  par 10 ( $0 \leq r < 10$ ) on obtient la clé par :  $C_{13} = 10 - r$  si  $r \neq 0$  ou 0 si  $r=0$

1. Vérifiez le calcul de la clé du numéro ISBN du manuel indiqué
2. On note  $S'$  la somme pondérée calculée sur les 13 chiffres de l'ISBN.
  - a. Dans un tableur, utilisez les 13 premières colonnes pour entrer plusieurs numéros ISBN valides de livres (de votre bibliothèque ou autre).
  - b. Calculez  $S'$  dans la colonne 14. Que conjecturez-vous ?
  - c. Démontrez votre conjecture. On distinguera les cas  $r \neq 0$  et  $r = 0$
3. a. Dupliquez la feuille de calculs. Dans la feuille dupliquée, modifiez pour chaque ISBN **un seul chiffre** choisi comme vous le souhaitez.
 

Que constatez-vous concernant  $S'$  ? Quel test sur la saisie d'un numéro ISBN pourrait permettre de détecter une erreur de saisie sur un chiffre ?
- b. Démontrez que ce test est valide.
 

On distinguera les cas pour lesquels le chiffre erroné est d'indice pair ou impair.

On notera  $C'_1$  et  $C'_2$  ce chiffre. On notera  $S'$  la somme pondérée des 13 chiffres du numéro ISBN correct et  $S''$  la somme pondérée des 13 chiffres du numéro ISBN mal saisi.

### CORRECTION

1.  $S = 131$  soit  $S = 13 \times 10 + 1$  donc  $C_{13} = 10 - 1 = 9$ .

2.  $S' = S + C_{13}$

2. a.

Numéro ISBN 1	9	7	8	2	0	9	1	7	2	6	6	4	9	Somme	Clé	S'
chiffres pondérés	9	21	8	6	0	27	1	21	2	18	6	12		131	9	140
Numéro ISBN 2	9	7	8	2	7	0	1	1	6	9	7	6	7	Somme	Clé	S'
chiffres pondérés	9	21	8	6	7	0	1	3	6	27	7	18		113	7	120
Numéro ISBN 3	9	7	8	2	7	0	1	1	5	1	0	2	1	Somme	Clé	S'
chiffres pondérés	9	21	8	6	7	0	1	3	5	3	0	6		69	1	70
Numéro ISBN 4	9	7	8	2	2	1	8	9	4	4	2	6	0	Somme	Clé	S'
chiffres pondérés	9	21	8	6	2	3	8	27	4	12	2	18		120	0	120
Numéro ISBN 5	3	3	4	8	5	4	2	1	7	3	0	6	4	Somme	Clé	S'
chiffres pondérés	3	9	4	24	5	12	2	3	7	9	0	18		96	4	100

b. Apparemment dans chacun des cas,  $S'$  est un multiple de 10.

c. Si  $r = 0$ ,  $C_{13} = 0$  donc  $S' = S$ ,  
 $r = 0$  donc  $S$  est un multiple de 10 donc si  $r = 0$ ,  $S'$  est un multiple de 10.

Si  $r \neq 0$ ,  $C_{13} = 10 - r$  donc  $S' = S + 10 - r$

$r$  est le reste de la division de  $S$  par 10 donc il existe un entier  $k$  tel que  $S = 10k + r$  donc  $S' = 10k + 10 = 10(k + 1)$

$S'$  est un multiple de 10

Dans chaque cas,  $S'$  est un multiple de 10

3. a. Numéro ISBN incorrects :

Numéro ISBN 1	9	7	8	2	0	2	1	7	2	6	6	4	9	S' = 119
Numéro ISBN 2	3	7	8	2	7	0	1	1	6	9	7	6	7	S' = 114
Numéro ISBN 3	9	1	8	2	7	0	1	1	5	1	0	2	1	S' = 32
Numéro ISBN 4	9	7	6	2	2	1	8	9	4	4	2	6	0	S' = 118
Numéro ISBN 5	3	3	4	3	5	4	2	1	7	3	0	6	4	S' = 85

En modifiant un seul chiffre, S' n'est plus un multiple de 10 donc le test consisterait à calculer la somme pondérée S' des 13 chiffres et à vérifier que cette somme est un multiple de 10

b. Soit S' la somme pondérée des 13 chiffres du numéro ISBN correct  
Soit S'' la somme pondérée des 13 chiffres du numéro ISBN mal saisi.

Si le chiffre erroné est d'indice pair soit C'<sub>2</sub> ce chiffre

$$S' = (C_1 + C_3 + C_5 + C_7 + C_9 + C_{11} + C_{13}) + 3(C_2 + C_4 + C_6 + C_8 + C_{10} + C_{12})$$

$$S'' = (C_1 + C_3 + C_5 + C_7 + C_9 + C_{11} + C_{13}) + 3(C'_2 + C_4 + C_6 + C_8 + C_{10} + C_{12})$$

donc  $S'' = S' + 3(C'_2 - C_2)$

Si le test n'est pas valide, S' est un multiple de 10, montrons que 10 ne divise pas  $3(C'_2 - C_2)$

$0 \leq C_2 < 10$  et  $0 \leq C'_2 < 10$  donc  $-10 < C'_2 - C_2 < 10$ , le chiffre est erroné donc  $C'_2 - C_2 \neq 0$

Si 10 divise  $3(C'_2 - C_2)$  comme 3 et 10 sont premiers entre eux 10 divise  $(C'_2 - C_2)$  (théorème de Gauss) or le seul multiple de 10 compris strictement entre -10 et 10 est 0 ce qui est impossible puisque le chiffre C<sub>2</sub> est erroné donc  $C'_2 - C_2 \neq 0$

10 ne divise pas  $3(C'_2 - C_2)$  donc 10 ne divise pas S'.

Le test est valide si l'erreur porte sur un nombre de rang pair.

Si le chiffre erroné est d'indice impair soit C'<sub>1</sub> ce chiffre

$$S' = (C'_1 + C_3 + C_5 + C_7 + C_9 + C_{11} + C_{13}) + 3(C_2 + C_4 + C_6 + C_8 + C_{10} + C_{12})$$

$$S'' = (C'_1 + C_3 + C_5 + C_7 + C_9 + C_{11} + C_{13}) + 3(C_2 + C_4 + C_6 + C_8 + C_{10} + C_{12})$$

donc  $S'' = S' + (C'_1 - C_1)$

Si le test n'est pas valide, S' est un multiple de 10, montrons que 10 ne divise pas  $(C'_1 - C_1)$

$0 \leq C_1 < 10$  et  $0 \leq C'_1 < 10$  donc  $-10 < C'_1 - C_1 < 10$ .

Le seul multiple de 10 compris strictement entre -10 et 10 est 0 ce qui est impossible puisque le chiffre C<sub>1</sub> est erroné donc  $C'_1 - C_1 \neq 0$

10 ne divise pas  $(C'_1 - C_1)$  donc 10 ne divise pas S'.

Le test est valide si l'erreur porte sur un nombre de rang impair.

Dans tous les cas le test est valide.