

Module Physique 1
TD de Thermodynamique
Corrigé de la série N°3

Exercice 1:

1) La mole de gaz parfait subit une transformation isotherme et passe de l'état initial (P_0, V_0, T_0) à l'état 1 $(2P_0, V_1, T_0)$. Puisque la variation de la température est nulle et que l'on connaît la variation totale de pression durant cette transformation, il y a lieu d'utiliser comme variables d'état le couple (T, P) pour lesquelles l'expression de la quantité de chaleur élémentaire est: $\delta Q = C_p dT + h dP$. Dans le cas d'un gaz parfait le coefficient calorimétrique $h = -V$. D'où $\delta Q = -V dP$.

La quantité de chaleur échangée par le gaz durant la transformation $(P_0, V_0, T_0) \rightarrow (2P_0, V_1, T_0)$ est alors:

$$Q = \int_{P_0}^{2P_0} -V dP = - \int_{P_0}^{2P_0} \frac{RT_0}{P} dP = -RT_0 \int_{P_0}^{2P_0} \frac{dP}{P} = -RT_0 [\ln(2P_0) - \ln(P_0)] = -RT_0 \ln(2). \quad \boxed{Q = -RT_0 \ln(2)}$$

A.N. : $\boxed{Q = -1729J}$

2) Puisqu'il n'y a pas échange de chaleur avec le milieu extérieur, la transformation est adiabatique. Par hypothèse, elle est réversible et fait passer le système de l'état initial (P_0, V_0, T_0) à l'état 2 $(2P_0, V_2, T_2)$. On peut donc appliquer la loi de Laplace: $PV^\gamma = \text{cste}$. Ici, il vaut mieux l'utiliser sous sa version qui met en jeu la température et

la pression, soit $P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cste}$. D'où $P_0^{1-\gamma} T_0^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma = 2^{1-\gamma} P_0^{1-\gamma} T_2^\gamma \Rightarrow T_2^\gamma = 2^{\gamma-1} T_0^\gamma \Rightarrow T_2 = 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_0$.

A.N. : $\boxed{T_2 = 365.7K}$

3) Calcul des volumes V_1 et V_2 en fonction de V_0 .

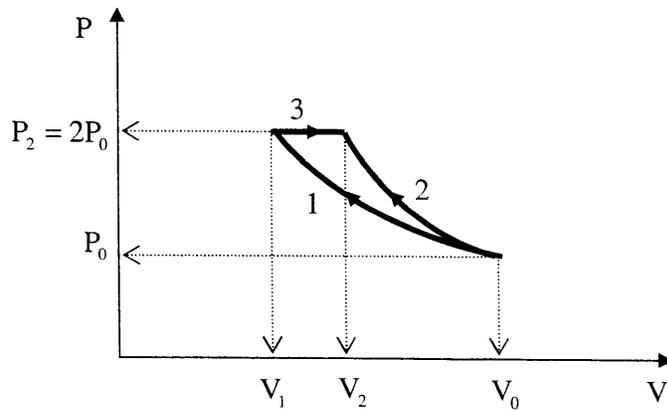
Il suffit d'utiliser la loi des gaz parfaits qui s'écrit ici dans le premier cas sous la forme : $P_0 V_0 = RT_0$ et $P_1 V_1 = RT_0$, soit $P_1 V_1 = P_0 V_0 \Rightarrow 2P_0 V_1 = P_0 V_0 \Rightarrow V_1 = \frac{V_0}{2}$.

Pour le volume V_2 , on a : $P_0 V_0 = RT_0$ et $P_2 V_2 = RT_2$, soit

$$P_2 V_2 = 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} RT_0 = 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} P_0 V_0 \Rightarrow V_2 = \frac{V_0}{2^{\frac{1}{\gamma}}}$$

On peut constater, puisque $\gamma > 1$, que $\frac{1}{\gamma} < 1$ et $2^{\frac{1}{\gamma}} < 2$, ce qui donne $V_2 > V_1$.

Le diagramme de Clapeyron de cette transformation est donné sur la page 2.



4) La transformation (3) est isobare et s'effectue à la pression $2P_0$. Elle fait passer le système de l'état $(2P_0, V_1, T_0)$ à l'état $(2P_0, V_2, T_2)$. Elle est représentée par la branche 3 du diagramme de Clapeyron.

* Calcul du travail échangé durant la transformation (3)

La transformation est réversible, donc $\delta W = -PdV$. Le travail échangé est :

$$W = \int_{V_1}^{V_2} -PdV = -2P_0 \int_{V_1}^{V_2} dV = -2P_0 (V_2 - V_1) = -P_0 V_0 \left(2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \Rightarrow W = -RT_0 \left(2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right).$$

A.N. : $W = -546.3J$.

* Calcul de la quantité de chaleur échangée durant la transformation (3)

Il suffit d'utiliser les coefficients calorimétriques appropriés. En effet, on connaît la variation de la température et la pression est ici constante, il y a donc lieu d'utiliser la quantité de chaleur élémentaire sous la forme: $\delta Q = C_p dT + h dP$. Ce qui donne pour cette transformation isobare : $\delta Q = C_p dT$. La quantité de chaleur échangée est alors :

$$Q = \int_{T_0}^{T_2} C_p dT. \text{ Pour calculer la chaleur spécifique molaire } C_p, \text{ il suffit de se rappeler de}$$

la relation de Mayer $C_p - C_v = R$ et de la définition $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, ce qui donne : $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$.

$$\text{D'où } Q = \int_{T_0}^{T_2} C_p dT = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_2 - T_0) \Rightarrow Q = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_0 \left(2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right).$$

A.N. : $Q = 1912J$.

Exercice 2:

On peut remarquer que $T_B = T_A$, ce qui signifie que l'énergie interne du système qui est un gaz parfait (donc vérifiant la première loi de Joule) n'a pas varié entre les états A et B. On peut alors conclure que $\Delta U_{A \rightarrow B} = 0$ quelque soit le chemin suivi. Cette

conclusion est importante car $\Delta U_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow B} + Q_{A \rightarrow B} = 0$ entraîne que $Q_{A \rightarrow B} = -W_{A \rightarrow B}$. Il suffit alors de calculer les travaux échangés.

* Travail échangé pour le chemin (1)

La transformation $A(P_A, V_A, T_A) \rightarrow B(P_B = 3P_A, V_B, T_A)$ est isotherme réversible, donc

$$W_1 = \int_{V_A}^{V_B} -PdV = -2RT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = -2RT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -2RT_A \ln\left(\frac{\frac{2RT_A}{P_B}}{\frac{2RT_A}{P_A}}\right) = -2RT_A \ln\left(\frac{P_A}{P_B}\right).$$

$$W_1 = 2RT_A \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right) = 2RT_A \ln(3). \quad Q_1 = -W_1 = -2RT_A \ln(3).$$

* Travail échangé pour le chemin (2)

La transformation $A(P_A, V_A, T_A) \rightarrow B(P_B = 3P_A, V_B, T_A)$ est maintenant représentée dans le diagramme de Clapeyron par une droite passant par les points A et B. Le travail échangé est positif et il est donné par l'aire de la surface délimitée par cette droite, les deux droites verticales $V = V_A$ et $V = V_B$, et l'axe des V. Cette surface est un trapèze, d'où :

$W_2 = \frac{1}{2}(V_A - V_B)(P_B + P_A)$. Mais $P_B = 3P_A$ et $V_B = \frac{1}{3}V_A$, ce qui donne

$$W_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}V_A\right)(4P_A) = \frac{4}{3}P_A V_A = \frac{8}{3}RT_A. \quad W_2 = \frac{8}{3}RT_A. \quad \text{Par conséquent } Q_2 = -W_2 = -\frac{8}{3}RT_A.$$

* Travail échangé pour le chemin (3)

La transformation $A(P_A, V_A, T_A) \rightarrow B(P_B = 3P_A, V_B, T_A)$ se décompose en deux transformations élémentaires: la première est isochore et la deuxième est isobare. Seule cette deuxième transformation contribue au travail échangé par le système qui passe de l'état A à l'état B, travail noté W_3 . Ce travail est positif. Il est donné par l'aire de la surface du rectangle défini par la droite horizontale passant par le point B, les deux droites verticales $V = V_A$ et $V = V_B$, et l'axe des V. D'où

$$W_3 = (V_A - V_B)P_B = \left(\frac{2}{3}V_A\right)(3P_A) = 2P_A V_A = 4RT_A. \quad W_3 = 4RT_A. \quad \text{La quantité de chaleur échangée durant la transformation (3) est alors } Q_3 = -W_3 = -4RT_A.$$

Remarque:

* Le travail et la quantité de chaleur échangés dépendent du chemin suivi, alors que leur somme n'en dépend pas. Le travail et la quantité de chaleur ne sont pas des fonctions d'état, bien que leur somme l'est.

* On vérifie ici les inégalités $W_1 < W_2 < W_3$ qui sont évidentes à partir du diagramme de Clapeyron représentant les trois transformations (le travail est l'aire de la surface sous la courbe représentant la transformation).

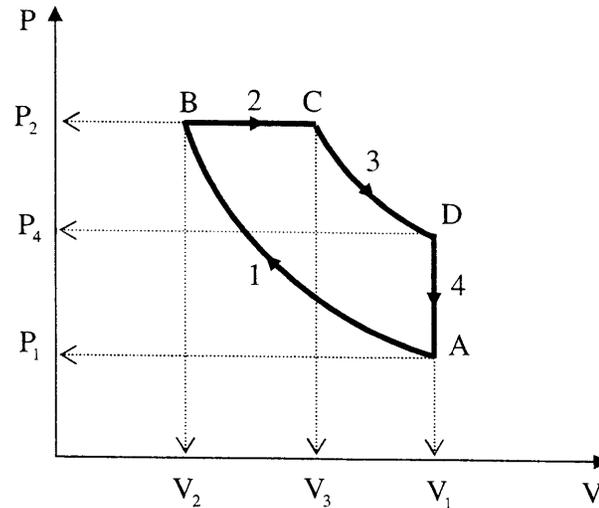
Exercice 3:

1) Représentation de l'allure du cycle dans le diagramme de Clapeyron.

La représentation est faite sur la page 3.

Le cycle est moteur car le travail échangé par le système durant le cycle est négatif.

On le voit directement à partir du diagramme: le cycle est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre, donc $W < 0$.



2) - Calcul de P_2 , P_3 et P_4 en fonction de a , b , γ et P_1 .

* Calcul de P_2

La transformation qui fait passer le système de $A(P_1, V_1, T_1) \rightarrow B(P_2, V_2, T_2)$ est

adiabatique, donc : $P_2 V_2^\gamma = P_1 V_1^\gamma \Rightarrow P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \Rightarrow \boxed{P_2 = P_1 a^\gamma}$.

* Calcul de P_3

La transformation faisant passer le système de l'état $B(P_2, V_2, T_2) \rightarrow C(P_3, V_3, T_3)$ est

isobare. D'où $P_3 = P_2 \Rightarrow \boxed{P_3 = P_1 a^\gamma}$.

* Calcul de la pression P_4

La transformation qui fait passer le système de $C(P_3, V_3, T_3) \rightarrow D(P_4, V_4, T_4)$ est

adiabatique, donc : $P_4 V_4^\gamma = P_3 V_3^\gamma \Rightarrow P_4 = P_3 \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^\gamma \Rightarrow P_4 = P_3 b^{-\gamma}$. En substituant dans cette

dernière équation $P_3 = P_1 a^\gamma$, il vient : $\boxed{P_4 = P_1 \left(\frac{a}{b} \right)^\gamma}$.

A.N. : $\boxed{P_2 = 21.67 \times 10^5 \text{ Pa}}$; $\boxed{P_3 = 21.67 \times 10^5 \text{ Pa}}$ et $\boxed{P_4 = 4.66 \times 10^5 \text{ Pa}}$.

- Calcul de V_1 , V_2 , V_3 et V_4

* Calcul de V_1

Le gaz est parfait, donc : $P_1 V_1 = RT_1$. Ce qui donne $V_1 = \frac{RT_1}{P_1}$. $V_1 = 24.94 \times 10^{-3} \text{ m}^3$.

*Calcul de V_2

On a : $a = \frac{V_1}{V_2}$, d'où $V_2 = \frac{V_1}{a}$. $V_2 = 2.771 \times 10^{-3} \text{ m}^3$.

*Calcul de V_3

On a : $b = \frac{V_4}{V_3}$ et $V_4 = V_1$ (car la transformation $D(P_4, V_4, T_4) \rightarrow A(P_1, V_1, T_1)$ est

isochore), d'où $V_3 = \frac{V_1}{b}$. $V_3 = 8.314 \times 10^{-3} \text{ m}^3$.

*Calcul de V_4

$V_4 = V_1$, $V_4 = 24.94 \times 10^{-3} \text{ m}^3$.

3.1) On a d'après la relation de Mayer: $C_{pm} - C_{vm} = R$ et par définition $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}}$. D'où

$$(\gamma - 1)C_{vm} = R \Rightarrow C_{vm} = \frac{R}{\gamma - 1}. \text{ D'autre part } C_{pm} = \gamma C_{vm} \Rightarrow C_{pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}.$$

3.2) Quantités de chaleur échangées durant le cycle:

* La transformation (1): $A(P_1, V_1, T_1) \rightarrow B(P_2, V_2, T_2)$ est adiabatique, donc : $Q_1 = 0$.

* La transformation (2): $B(P_2, V_2, T_2) \rightarrow C(P_3, V_3, T_3)$ est isobare, il est pertinent de prendre pour l'expression de la quantité de chaleur élémentaire: $\delta Q = C_{pm} dT + h_m dP$.

Ici $dP = 0$, ce qui donne: $Q_2 = \int_{T_2}^{T_3} C_{pm} dT = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_3 - T_2)$. Soit, en utilisant la loi des gaz

parfaits: $Q_2 = \frac{\gamma P_2}{\gamma - 1} (V_3 - V_2)$. $Q_2 = 42.05 \text{ kJ} \approx 42 \text{ kJ}$.

* La transformation (3): $C(P_3, V_3, T_3) \rightarrow D(P_4, V_4, T_4)$ est adiabatique, donc $Q_3 = 0$.

* La transformation (4): $D(P_4, V_4, T_4) \rightarrow A(P_1, V_1, T_1)$ est isobare, il est judicieux de prendre pour l'expression de la quantité de chaleur élémentaire: $\delta Q = C_{vm} dT + l_m dV$.

Ici $dV = 0$, ce qui donne: $Q_4 = \int_{T_4}^{T_1} C_{vm} dT = \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_4)$. En utilisant l'équation d'état des

gaz parfaits, il vient: $Q_4 = \frac{V_1}{\gamma - 1} (P_1 - P_4)$. $Q_4 = -22.82 \text{ kJ} \approx -23 \text{ kJ}$.

3.3) Travaux échangés durant le cycle :

* La transformation (1): $A(P_1, V_1, T_1) \rightarrow B(P_2, V_2, T_2)$ est adiabatique réversible, donc le travail élémentaire échangé est : $\delta W = -PdV$ avec $PV^\gamma = \text{cste} = k$. D'où

$$W_1 = \int_{V_1}^{V_2} -PdV = -k \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = -\frac{k}{1-\gamma} (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}) = -\frac{1}{1-\gamma} (P_2 V_2^\gamma V_2^{1-\gamma} - P_1 V_1^\gamma V_1^{1-\gamma})$$

$$W_1 = \frac{1}{\gamma-1} (P_2 V_2 - P_1 V_1) \quad W_1 = 8.781 \text{ kJ} \approx 8.9 \text{ kJ}$$

* La transformation (2): $B(P_2, V_2, T_2) \rightarrow C(P_3, V_3, T_3)$ est isobare réversible, le travail élémentaire échangé est: $\delta W = -P dV$ avec $P = P_2$. D'où $W_2 = \int_{V_2}^{V_3} -P_2 dV = -P_2 (V_3 - V_2)$

$$W_2 = -P_2 (V_3 - V_2) \quad W_2 = -12.01 \text{ kJ} \approx -12 \text{ kJ}$$

* La transformation (3): $C(P_3, V_3, T_3) \rightarrow D(P_4, V_4, T_4)$ est adiabatique réversible, donc

$$W_3 = \frac{1}{\gamma-1} (P_4 V_4 - P_3 V_3) \quad W_3 = -15.99 \text{ kJ} \approx -16 \text{ kJ}$$

* La transformation (4): $D(P_4, V_4, T_4) \rightarrow A(P_1, V_1, T_1)$ est isobare ^{inverse}, donc: $W_4 = 0$.

4) Durant un cycle, l'état final coïncide avec l'état initial. Du fait que l'énergie interne est une fonction d'état, elle ne varie pas de sorte que durant le cycle: $\Delta U = 0$. Or la variation de l'énergie interne est ici donnée par $\Delta U = W + Q$ avec $W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$ et $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$. Il faut donc vérifier que $W + Q = 0$. Ce qui se vérifie bien car:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 8.9 - 12 - 16 = -19.1 \text{ kJ} \approx -19 \text{ kJ} \text{ et}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 42 - 23 = 19 \text{ kJ}$$

On peut donc conclure que le 1^{er} principe de la thermodynamique est bien vérifié.