ENONCE

Pondichéry 2004

Partie A (admise)

Dans cette partie, on étudie la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)\,e^{-x} - 1$.

Le tableau de variations de φ est :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$3e^{-1}-1$	↘	-1

Il s'en suite que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une notée α dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$ avec $1{,}79 < \alpha < 1{,}80$.

Le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

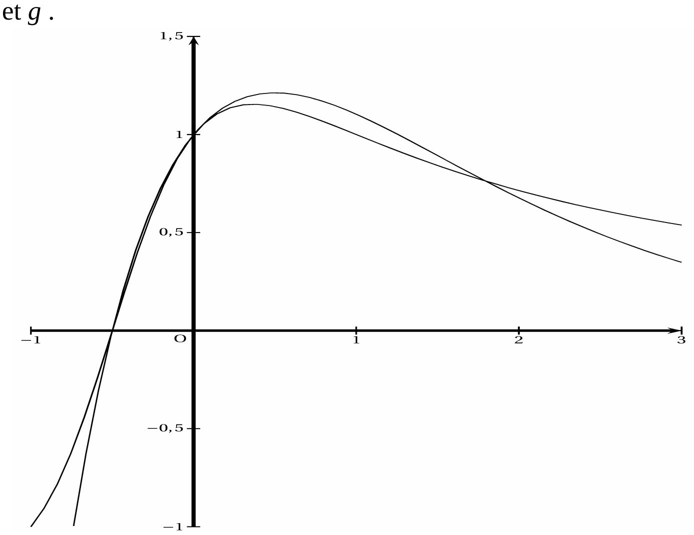
Partie B : Étude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

Ci-contre sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions f et g.

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x + 1)\,e^{-x} \text{ et } g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, sont notées C_f et C_g.



1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées (0 ; 1) et admettent en ce point la même tangente.

a. Démontrer que, pour tout nombre réel x,

$$f(x) - g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}\varphi(x)$$

où φ est la fonction étudiée dans la **partie A**.

b. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire la position relative des courbes C_f et C_g.

2. ***a.*** Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (-2x - 3)\,e^{-x} - \ln(x^2 + x + 1)$$

est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$.

b. En déduire l'aire A, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les deux courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$.

Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-4} de cette aire.

CORRECTION

Partie B : Étude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

1. Il suffit de montrer que les deux courbes passent par A et que les coefficients directeurs des tangentes sont les mêmes donc vérifier que $f(0) = g(0)$ et que $f'(0) = g'(0)$

$f(x) = (2x + 1)\,e^{-x}$ et $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ donc $f(0) = 1 = g(0)$

$f'(x) = 2e^{-x} + (2x + 1)(-e^{-x})$ donc $f'(0) = 1$

$g'(x) = \dfrac{2(x^2+x+1) - (2x+1)^2}{(x^2+x+1)^2}$ donc $g'(0) = 1$

donc les deux courbes passent par le point A de coordonnées (0 ; 1) et admettent en ce point la même tangente.

a. $f(x) - g(x) = (2x + 1)\,e^{-x} - \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

$$f(x) - g(x) = (2x+1)\left(e^{-x} - \frac{1}{x^2+x+1}\right)$$

$$f(x) - g(x) = (2x+1)\left(\frac{(x^2+x+1)\,e^{-x} - 1}{x^2+x+1}\right)$$

$$f(x) - g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}[(x^2 + x + 1)\,e^{-x} - 1] = \frac{2x+1}{x^2+x+1}\varphi(x)$$

b. $x^2 + x + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc est toujours positif

x	$-\infty$		$-0,5$		0		α		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\varphi(x)$		$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

c. **D'après le signe de** $f(x) - g(x)$, il s'en suit que :
les courbes C_f et C_g admettent 3 points d'intersection d'abscisses $-0,5$; 0 et α
sur $]-\infty\,;-0,5[$ C_f est en dessous de C_g .
sur $]-0,5\,;0[\,\cup\,]0\,;\alpha[$ C_f est au dessus de C_g .
sur $]\alpha\,;+\infty[$ C_f est en dessous de C_g .

2. *a.* h est dérivable comme somme de fonctions dérivables

$$h'(x) = -2\,e^{-x} + (-2x - 3)(-e^{-x}) - \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$$h'(x) = (2x+1)\,e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = f(x) - g(x).$$

h est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$.

b. Les fonction f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et sur $]-0,5\,;0[$, C_f est au dessus de C_g .

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx = h(0) - h(-0,5)$$

$A = -3 - [-2\,e^{0,5} - \ln(0,75)]$
$A = 2\,e^{0,5} + \ln 0,75 - 3$
$A \approx 0,0098$ *u.a.*