EXERCICE 1 **4 points** ***Commun à tous les candidats***

Pour chacune des questions suivantes, une ou deux des réponses proposées sont correctes.
Un point est attribué à chacune des questions. Toute réponse inexacte est pénalisée de 0,25 point.
Il n'y a pas de pénalité en cas d'absence de réponse. Aucune justification n'est attendue.
Si le total des points obtenus est négatif, le note attribuée à l'exercice est 0.
Recopier le numéro de la question et la ou les réponses correctes (deux au maximum).

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

A : $\frac{5}{8}$ B : $\frac{21}{32}$ C : $\frac{11}{32}$ D : $\frac{3}{8}$

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes.

La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

A : $\frac{105}{248}$ B : $\frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}}$ C : $\frac{212}{322}$ D : $\frac{52}{82}$

3. On suppose que la durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 1].

La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est :

A : $\frac{1}{3}$ B : $\frac{1}{5}$ C : $\frac{1}{12}$ D : $\frac{1}{4}$

4. On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15.

La probabilité pour qu'exactement 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est égale à :

A : 0,35 à 10^{-2} près B : 0,859 C : $0{,}85^{9} \times 0{,}15$ D : $0{,}85^{9} \times 0{,}15 \times 10$

EXERCICE 2 **5 points** ***Réservé aux candidats* n'*ayant pas suivi* l'*enseignement de spécialité***

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm.

1. Restitution organisée de connaissances

Pour M ≠ Ω, on rappelle que le point M′ est l'image du point M par la rotation *r* de centre Ω et d'angle de mesure θ si et seulement si :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M & (1) \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) & (2) \end{cases}$$

a. Soient z, z' et ω les affixes respectives des points M, M′ et Ω.

Traduire le relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.

b. En déduire l'expression de z' en fonction de z, θ et ω

2. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation : $z^2 - 4\sqrt{3}\,z + 16 = 0$.

On donnera les solutions sous forme algébrique.

3. Soient A et B les points d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3} - 2\,\mathrm{i}$ et $b = 2\sqrt{3} + 2\,\mathrm{i}$.

a. Écrire a et b sous forme exponentielle.
b. Faire une figure et placer les points A et B.
c. Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

4. Soit C le point d'affixe $c = -8\,\mathrm{i}$ et D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Placer les points C et D.

Montrer que l'affixe du point D est $d = 4\sqrt{3} + 4\,\mathrm{i}$.

5. Montrer que D est l'image du point B par une homothétie de centre O dont on déterminera le rapport.
6. Montrer que OAD est un triangle rectangle.

EXERCICE 2 **5 points** ***Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité***

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm.

1. Restitution organisée de connaissances

On utilisera sans démonstration les deux propriétés suivantes :

Propriété 1 : Toute similitude indirecte qui transforme un point M d'affixe z en un point M′ d'affixe z' admet une expression complexe de la forme $z' = a\,\overline{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Propriété 2 : Soit C une point d'affixe c. Pour tout point D, distinct de C, d'affixe d et pour tout point E, distinct de C, d'affixe e, on a : $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}) = \arg\left(\frac{e-c}{d-c}\right) \quad (2\pi)$.

Question : Montrer qu'une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

2. Soient les points C et D d'affixes respectives $c = 3$ et $d = 1 - 3\,\text{i}$, et S_1 la similitude qui à tout point M du plan associe le point M_1 symétrique de M par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$ des réels.

a. Placer les points C et D puis leurs images respectives C_1 et D_1 par S_1. On complètera le figure au fur et à mesure de l'exercice.

b. Donner l'expression complexe de S_1.

3. Soit S_2 la similitude directe définie par :

– le point C_1 et son image C′ d'affixe $c' = 1 + 4\,\text{i}$;

– le point D_1 et son image D′ d'affixe $d' = -2 + 2\,\text{i}$.

a. Montrer que l'expression complexe de S_2 est : $z' = \text{i}\,z + 1 + \text{i}$.

b. En déduire les éléments caractéristiques de cette similitude.

4. Soit S la similitude définie par $S = S_2 \circ S_1$. Déterminer l'expression complexe de S.

5. On pourra admettre désormais que S est la similitude indirecte d'expression complexe : $z' = \text{i}\,\bar{z} + 1 + \text{i}$.

a. Quelle est l'image de C par S ? Quelle est l'image de D par S ?

b. Soit H le point d'affixe h tel que : $h - c = e^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(d - c)$.

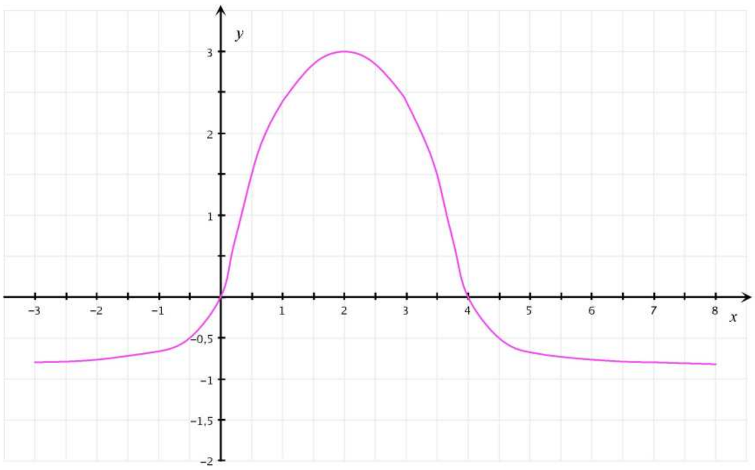
Montrer que le triangle CDH est équilatéral direct.

c. Soit H′ l'image de H par S . Préciser la nature du triangle C′D′H′ et construire le point H′ (on ne demande pas de calculer l'affixe h' du point H′).

EXERCICE 3 **4 points** ***Commun à tous les candidats***

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $I = [-3\,;8]$.

On définit la fonction F sur I , par $F(x) = \int_0^x f(t)\,\text{d}t$.



1. *a.* Que vaut F(0) ?

b. Donner le signe de F(x) :

– pour $x \in [0\,;4]$;

– pour $x \in [-3\,;0]$.

Justifier les réponses.

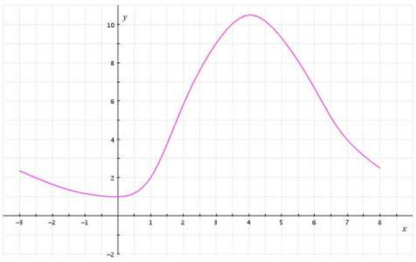
c. Faire figurer sur le graphique donné en ANNEXE les éléments permettant de justifier les inégalités $6 \leq F(4) \leq 12$.

2. *a.* Que représente f pour F ?

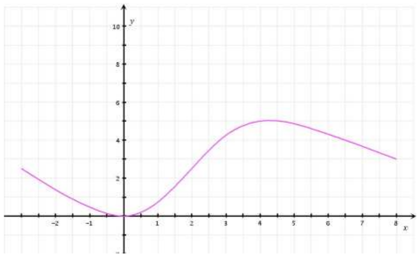
b. Déterminer le sens de variation de la fonction F sur I . Justifier la réponse à partir d'une lecture graphique des propriétés de f .

3. On dispose de deux représentations graphiques sur I.

Courbe A



Courbe B



L'une de ces courbes peut-elle représenter la fonction F ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 **6 points** ***Commun à tous les candidats***

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par $g(x) = x - x\ln x$.

1. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ et que $g'(x) = -\ln x$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g .

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :

a. le sens de variation de la suite (u_n) ;

b. la limite éventuelle de la suite (u_n).

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln(u_n)$.

a. Montrer que $v_n = n - n\ln n$.

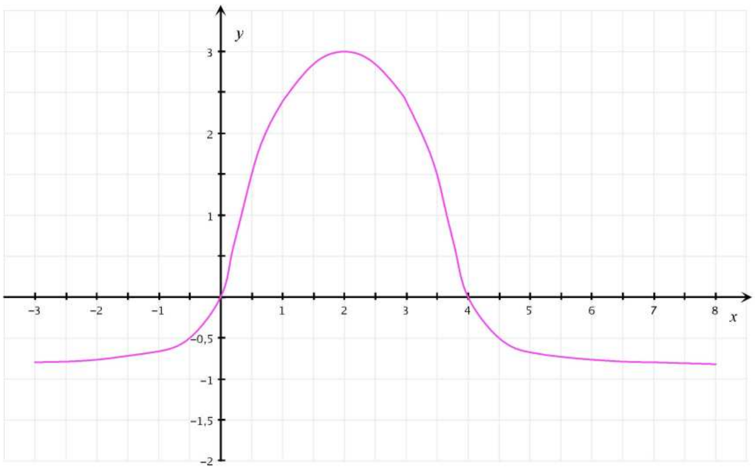
b. En utilisant la Partie A, déterminer le sens de variation de la suite (v_n).

c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. Montrer que la suite (u_n) est bornée.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 3 **Commun à tous les candidats**



EXERCICE 1 **4 points** ***Commun à tous les candidats***

1. **Réponse B**

Les tirages sont équiprobables.

Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 as et 8 piques (dont un as déjà compté) soit 11 cartes qui sont soit un as soit un pique

Il reste donc 32 – 11 = 21 cartes qui ne sont ni un as ni un pique donc $p = \dfrac{21}{32}$

2. **Réponse A et B**

Le nombre de cas possibles est $\binom{32}{2}$, il faut choisir 2 cartes simultanément (sans ordre ni répétition) parmi les 21 qui ne sont ni des as ni des piques, le nombre de cas favorables est donc $\binom{21}{2}$

$$p = \frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{210}{496} = \frac{105}{248}$$

3. **Réponse C**

15 min correspond à $\dfrac{1}{4}$ heure et 20 min à $\dfrac{1}{3}$ heure

La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est : $p = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

4. **Réponse A et D**

On a une succession de 10 expériences aléatoires, identiques et indépendantes.

Chacune d'elle à deux issues :

- réussite : l'appareil tombe en panne durant la période de garantie ($p = 0{,}15$)
- échec : l'appareil ne tombe pas en panne durant la période de garantie ($q = 1 - p = 0{,}85$)

donc la variable aléatoire qui compte le nombre l'appareil tombant en panne durant la période de garantie, parmi les 10 appareils prélevés, suit une loi binomiale de paramètres 10 ; 0,15

$p(X = k) = \binom{10}{k} p^{k} (1 - p)^{10-k}$ soit

La probabilité pour qu'exactement 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est celle qu'un appareil exactement soit tombé en panne.

$p(X = 1) = \binom{10}{1} \times 0{,}85^{9} \times 0{,}15 \approx 0{,}35$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 2 **5 points** ***Réservé aux candidats* n'*ayant pas suivi* l'*enseignement de spécialité***

1. *a*. $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M & (1) \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z' - \omega| = |z' - \omega| & (1) \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) & (2) \end{cases}$

b. $\begin{cases} |z' - \omega| = |z' - \omega| & (1) \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = {}^{e\,i\,\theta} \Leftrightarrow z' - \omega = {}^{e\,i\,\theta}(z - \omega)$

2. Soit $z^2 - 4\sqrt{3}\,z + 16 = 0$, $\Delta = 16 \times 3 - 4 \times 16 = -16 = (4\,i)^2$ donc $z_1 = \dfrac{4\sqrt{3} + 4\,i}{2} = 2\sqrt{3} + 2\,i$ et $z_2 = 2\sqrt{3} - 2\,i$

3. *a*. $|b|^2 = 4 \times 3 + 4 = 16$ donc $|b| = 4$, $b = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i\right) = 4\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

$a = \overline{b}$ donc $a = 4\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$

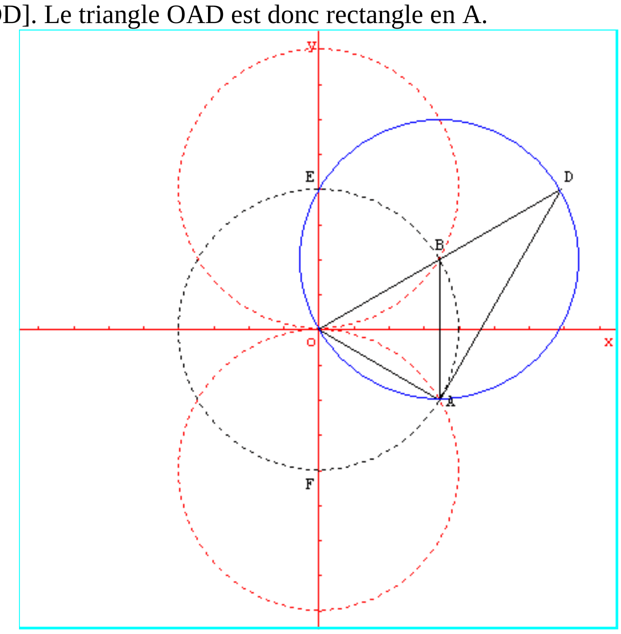
c. OA = $|a|$ = 4 et OB = $|b|$ = 4 de plus AB = $|b - a|$ = $|4\,i|$ = 4 donc OAB est un triangle équilatéral.

4. $d = e^{i\frac{2\pi}{3}}\,c = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)(-8\,i) = (1 - \sqrt{3}\,i)(4\,i) = 4\sqrt{3} + 4\,i.$

5. $d = 2\,b$ soit $\overrightarrow{OD} = 2\,\overrightarrow{OB}$ donc D est l'image du point B par une homothétie de centre O de rapport 2.

6. le triangle OAB est équilatéral donc OB = AB ; $\overrightarrow{OD} = 2\,\overrightarrow{OB}$ donc B est le milieu de [OD] donc BD = OB

On a donc BO = B A = BD et les points O, B et D sont alignés, donc O est le centre du cercle circonscrit du triangle OBD et le point A appartient au cercle de diamètre [OD]. Le triangle OAD est donc rectangle en A.



EXERCICE 2 **5 points** ***Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité***

1. Restitution organisée de connaissances

Soit M, N, P, Q quatre points quelconques tels que M ≠ N et P ≠ Q, soient M', N' , P' et Q' leurs images par la similitude indirecte *s*
Soient *m*, *n*, *p*,*q*, *m*', n', *p*' et *q*' leurs affixes respectives

$q' = a\,\overline{q} + b$; $p' = a\,\overline{p} + b$ donc $q' - p' = a\,(\overline{q} - \overline{p})$

$n' = a\,\overline{n} + b$; $m' = a\,\overline{m} + b$ donc $n' - m' = a\,(\overline{n} - \overline{m})$ donc $\dfrac{q'-p'}{n'-m'} = \dfrac{\overline{q}-\overline{p}}{\overline{n}-\overline{m}} =$

$\arg\left(\dfrac{\overline{q}-\overline{p}}{\overline{n}-\overline{m}}\right) = -\arg\left(\dfrac{q-p}{n-m}\right)$ (2π) donc $\arg\left(\dfrac{q'-p'}{n'-m'}\right) = -\arg\left(\dfrac{q-p}{n-m}\right)$ (2π) or $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) = \arg\left(\dfrac{q-p}{n-m}\right)$ (2π).

et $(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}) = \arg\left(\dfrac{q'-p'}{n'-m'}\right)$ (2π) donc $(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}) = -(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$ (2π)

Une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

2. S_1 est la similitude qui à tout point M du plan associe le point M_1 symétrique de M par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$ des réels donc $C_1 = C$ et D_1 a pour affixe 1 + 3 i

b. S_1 est la similitude qui à tout point M du plan associe le point M_1 symétrique de M par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$ des réels donc qui a pour écriture complexe $z' = \overline{z}$

3. *a.* S_2 est une similitude directe donc a une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + b$ avec $a \neq 0$
S_2 transforme le point C_1 en C′ d'affixe $c' = 1 + 4\,\mathrm{i}$ donc $1 + 4\,\mathrm{i} = 3\,a + b$
S_2 transforme le point D_1 en D′ d'affixe $d' = -2 + 2\,\mathrm{i}$ donc $-2 + 2\,\mathrm{i} = (1 + 3\,\mathrm{i})\,a + b$
par différence membre à membre : $(1 + 3\,\mathrm{i} - 3)\,a = -2 + 2\,\mathrm{i} - 1 - 4\,\mathrm{i}$ soit $(-2 + 3\,\mathrm{i})\,a = -3 - 2\,\mathrm{i}$

$a = \dfrac{3+2\,\mathrm{i}}{2-3\,\mathrm{i}} = \dfrac{(3+2\,\mathrm{i})(2+3\,\mathrm{i})}{(2-3\,\mathrm{i})(2+3\,\mathrm{i})} = \dfrac{6+9\,\mathrm{i}+4\,\mathrm{i}-6}{4+9} = \mathrm{i}$

$b = -2 + 2\,\mathrm{i} - (1 + 3\,\mathrm{i})\,a = -2 + 2\,\mathrm{i} - (1 + 3\,\mathrm{i})\,\mathrm{i} = -2 + 2\,\mathrm{i} - \mathrm{i} + 3$

$b = 1 + \mathrm{i}$ donc l'expression complexe de S_2 est : $z' = \mathrm{i}\,z + 1 + \mathrm{i}$.

b. S_2 est une similitude directe de rapport $|\,\mathrm{i}\,| = 1$ et d'angle $\arg \mathrm{i} = \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$

Le centre S_2 est l'unique point invariant de S_2 donc son affixe vérifie $z = \mathrm{i}\,z + 1 + \mathrm{i}$ soit $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$

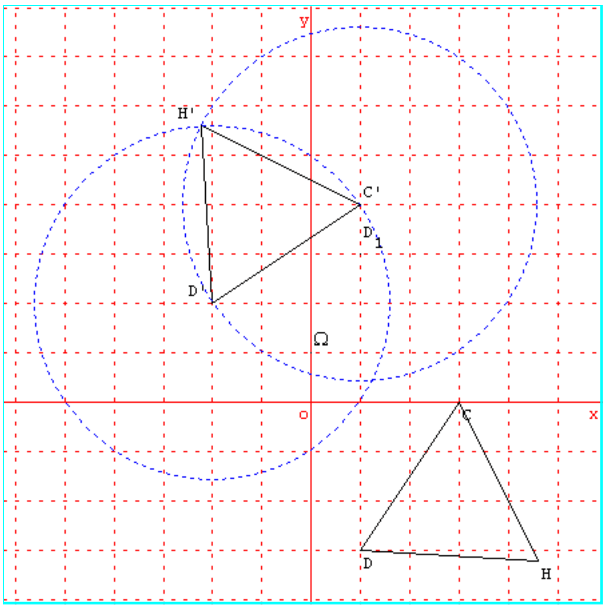
Le centre S_2 a pour affixe i

4. $M(z) \xrightarrow{S_1} M_1\,(z_1 = \overline{z}) \xrightarrow{S_2} M'\,(z' = \mathrm{i}\,z_1 + 1 + \mathrm{i} = \mathrm{i}\,\overline{z} + 1 + \mathrm{i})$ donc S a pour écriture complexe $z' = \mathrm{i}\,\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$.

5. *a.* C a pour affixe 3 donc C' image de C par S a pour affixe :
$3\,\mathrm{i} + 1 + \mathrm{i} = 1 + 4\,\mathrm{i}$
D a pour affixe 1 – 3 i donc D' image de D par S a pour affixe $\mathrm{i}\,(1 + 3\,\mathrm{i}) + 1 + \mathrm{i} = -2 + 2\,\mathrm{i}$

b. $h - c = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\,(d - c)$ donc H est l'image de D dans la rotation de centre C d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ donc le triangle CDH est équilatéral direct.

c. $S = S_2 \circ S_1$, or S_1 est une similitude indirecte et S_2 est une similitude directe, donc S est une similitude indirecte. Par ailleurs, dans cette similitude indirecte S , le triangle équilatéral direct CDH a pour image C′D′H′. Ce dernier triangle est donc équilatéral indirect.

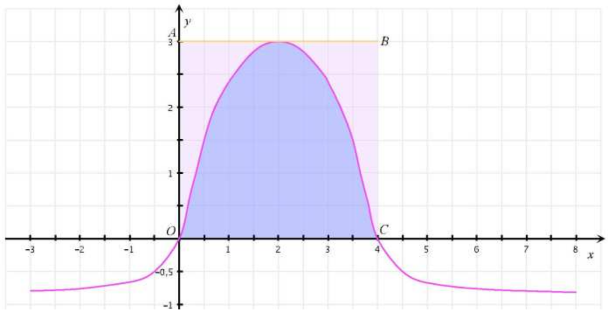


EXERCICE 3 **4 points** ***Commun à tous les candidats***

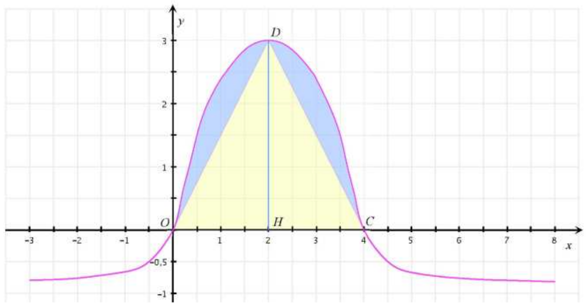
1. *a*. $F(0) = \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

b. f est une fonction continue positive sur [0 ; 4] donc pour $x \in [0\ ;\ 4]$; $F(x) \geq 0$
f est une fonction continue négative sur [−3 ; 0].donc pour $\alpha \in [-3\ ;\ 0]$; $F(\alpha) \leq 0$

c. f est une fonction continue positive sur [0 ; 4] donc F(4) mesure l'aire du domaine plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe de f , les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$, cette aire est inférieure à l'aire du rectangle OABC,
donc $F(4) \leq OA \times AB$, soit : $F(4) \leq 12$.



l'aire F(4) est supérieure à celle du triangle ODC de hauteur [DH] (en jaune sur la figure ci-dessous) donc $F(4) \geq \frac{1}{2} DH \times OC$ soit $F(4) \geq 6$.



2. *a*. La fonction f est continue sur [− 3 ; 8], donc $F : x \rightarrow \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur [− 3 ; 8] nulle en 0.

b. F est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$, graphiquement, $f(x) < 0$ sur [– 3 ; 0 [; $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ sur] 0 ; 4 [$f(4) = 0$ et $f(x) < 0$ sur] 4 ; 8]

x	-3		0		4		8
signe de $F'(x) = f(x)$		–	0	+	0	–	
variation de F	F(– 3)	↘	0	↗	F(4)	↘	F(8)

donc F est décroissante sur [– 3 ; 0 [; croissant sur [0 ; 4 [$f(4) = 0$ et décroissante sur [4 ; 8]

3. Les deux courbes satisfont aux sens de variation de F trouvé en 2 *b*. seule la courbe B satisfait à F(0) = 0.
D'autre part $6 \leq F(4) \leq 12$ or pour la courbe B, $F(4) < 6$ donc aucune des deux courbe convient.

EXERCICE 4 6 points *Commun à tous les candidats*

Partie A

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$

$g(x) = x(1 - \ln x)$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

2. La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ donc la fonction $x \to 1 - \ln x$ aussi donc g est le produit de deux fonctions dérivables $x \to x$ et $x \to 1 - \ln x$ donc g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

$g'(x) = 1(1 - \ln x) + x \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$

3. $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	0		1		$+\infty$
signe de $g'(x)$		+	0	–	0
variation de g	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Partie B

1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	2,7183	1,8473	0,7439	0,2133	0,0475	0,0086	0,0013	0,00018	0,000021

a. Sur les premiers termes, la suite (u_n) est décroissante

b. Sur les premiers termes, la suite (u_n) converge vers 0

2\. *a*. $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\dfrac{e^n}{n^n}\right) = \ln(e^n) - \ln(n^n) = n \ln e - n \ln n = n - n \ln n$.

b. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $n + 1 > n \geq 1$ donc g étant décroissante sur $[1 ; +\infty[$, $g(n+1) \leq g(n) \leq 1$ soit $v_{n+1} \leq v_n \leq 1$

la suite (v_n) est décroissante.

c. $v_n = \ln(u_n)$ donc $u_n = e^{v_n}$ or $v_{n+1} \leq v_n \leq 1$ donc $e^{v_{n+1}} \leq e^{v_n} \leq e$ soit $u_{n+1} \leq u_n \leq e$

la suite (u_n) est décroissante

3. $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$ donc $u_n > 0$, d'après la question précédente, $u_n \leq e$ donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leq e$

la suite (u_n) est bornée.

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc est convergente.

$v_n = g(n)$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

$u_n = e^{v_n}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{n \to -\infty} u_n = 0$