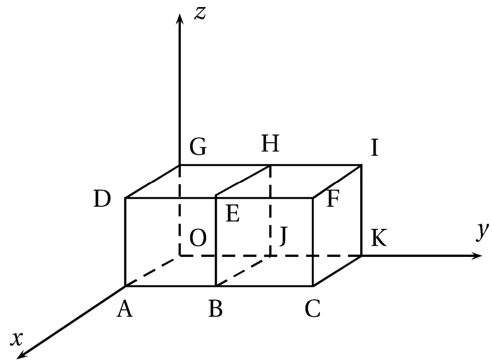
EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

*Cet exercice est un QCM qui comporte 8 questions, numérotées de 1 à 8. À chaque question, une seule des trois réponses notée **a**, **b** ou **c** est exacte. On demande au candidat d'indiquer sur sa copie, pour chaque question, quelle est la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.*

Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlèvent pas de point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(1, 2,0), D(1, 0, 1), E(1, 1, 1), F(1, 2, 1), G(0, 0, 1), H(0, 1, 1), I(0, 2, 1), J(0, 1, 0), K(0, 2, 0) comme indiqués sur la figure ci -contre :



1. Question 1 : Le triangle GBI est :

Réponse ***a*** : isocèle. Réponse ***b*** : équilatéral. Réponse ***c*** : rectangle.

2. Question 2 : Le barycentre du système de points pondérés {(O, 2), (A, – 1), (C, 1)} est :

Réponse ***a*** : le point K. Réponse ***b*** : le point I. Réponse ***c*** : le point J.

3. Question 3 : Le produit scalaire $\overrightarrow{AH}\,.\,\overrightarrow{FC}$ est égal à :

Réponse ***a*** : 1. Réponse ***b*** : – 1. Réponse ***c*** : 2.

4. Question 4 : Les points B, C, I, H :

Réponse ***a*** : sont non coplanaires. Réponse ***b*** : forment un rectangle. Réponse ***c*** : forment un carré.

5. Question 5 : Une représentation paramétrique de paramètre t de la droite (KE) est :

Réponse ***a*** $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$ Réponse ***b*** $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$. Réponse ***c*** $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

6. Question 6 : Une équation cartésienne du plan (GBK) est :

Réponse ***a*** : $2x + 2y - z - 2 = 0$. Réponse ***b*** : $x + y - 3 = 0$. Réponse ***c*** : $x + y + 2z = 2$.

7. Question 7 : La distance du point C au plan (ADH) est :

Réponse ***a*** : $\sqrt{2}$. Réponse ***b*** : 2. Réponse ***c*** : $\dfrac{1}{2}$.

8. Question 8 : Le volume du tétraèdre HJKB est égal à :

Réponse ***a*** : $\dfrac{1}{2}$ Réponse ***b*** : $\dfrac{1}{6}$. Réponse ***c*** : $\dfrac{1}{3}$.

EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives : $a = -2$, $b = 2 - 2\,\mathrm{i}\sqrt{3}$, $c = 3 + 3\,\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $p = 10$.

PARTIE A Étude de la configuration

1. Construction de la figure.

a. Placer les points A et P dans le repère $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$,

b. Déterminer les modules des nombres complexes b et c.

c. Utiliser les cercles de centre O et de rayons respectifs 4 et 6 pour construire les points B et C.

2. Démontrer que le triangle BCP est équilatéral.

3. On note r_A la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Vérifier que l'image Q du point C par r_A a pour affixe : $q = -4 + 4\,\mathrm{i}\sqrt{3}$.

b. Vérifier l'égalité : $q = -2b$. Que peut-on en déduire pour les points B, O et Q ?

4. Soit R le symétrique de C par rapport à O.

a. Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes en O.

b. Établir que : AP = BQ = CR.

PARTIE B

On note f l'application qui, à tout point M du plan, associe le réel f (M) défini par : f (M) = MA + MB + MC.

1. Calculer f (O).

2. Soient M un point quelconque et N son image par la rotation r_{A}.

Démontrer que : MA = MN puis que MC = NQ.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiatives,même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation.*

En utilisant l'inégalité triangulaire, démontrer que pour tout point M du plan, $f\,(\text{M}) \geq 12$

EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). L'unité graphique est 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère les points B, C et H d'affixes respectives : $b = 5\,\text{i}$, $c = 10$ et $h = 2 + 4\,\text{i}$.

Construire une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Étude de la position du point H

a. Démontrer que le point H appartient à la droite (BC).

b. Calculer $\dfrac{h}{h-c}$, et en déduire que $(\overrightarrow{\text{HC}}, \overrightarrow{\text{HA}}) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

2. Étude d'une première similitude

a. Calculer les rapports : $\dfrac{\text{BH}}{\text{AH}}$, $\dfrac{\text{BA}}{\text{AC}}$ et $\dfrac{\text{AH}}{\text{CH}}$.

b. Démontrer qu'il existe une similitude directe S_1 qui transforme le triangle CHA en le triangle AHB.

c. Déterminer l'écriture complexe de cette similitude S_1 ainsi que ses éléments caractéristiques.

3. Étude d'une seconde similitude

Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiatives,même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation.

On note S_2 la similitude qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' telle que : $z' = (-1 - 2\,\text{i})\,\overline{z} + 10$.

Démontrer que S_2 est composée d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ), et d'une similitude directe dont le centre Ω appartient à (Ω). Préciser (Δ).

4. Étude d'une composée

a. Calculer le rapport de la similitude composée $\text{S}_2 \circ \text{S}_1$.

b. En déduire le rapport entre les aires des triangles CHA et BAC.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

• si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif ;

• si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :

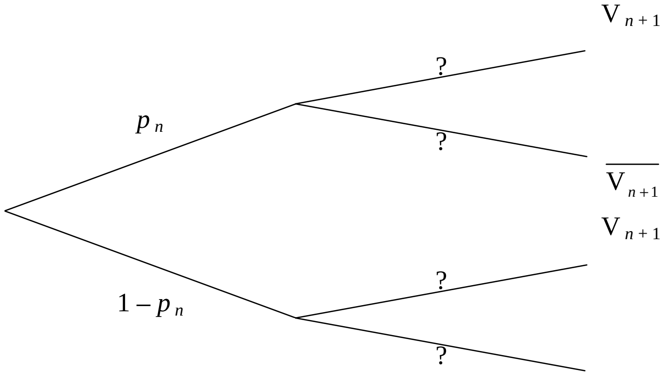
a. A : « les 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ sondages sont positifs » ;

b. B : « les 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ sondages sont négatifs ».

2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3$^{\text{e}}$ sondage soit positif.

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



$\overline{\mathrm{V}_{n+1}}$

4. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0{,}5\, p_n + 0{,}1$.

5. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0{,}2$.

a. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

b. Exprimer p_n en fonction de n.

c. Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

L'objectif de l'exercice est l'étude d'une fonction et d'une suite liée à cette fonction.

PARTIE A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. Étude des limites

a. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.

b. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.

c. Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe C ?

2. Étude des variations de la fonction f

a. Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$

b. Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$.

PARTIE B Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ on considère l'intégrale I_n définie par : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_2.

2. Une relation de récurrence

a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 2$: $\mathrm{I}_{n+1} = \mathrm{e} - \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{n-1}} + (n-1)\,\mathrm{I}_n$.

b. Calculer I_3.

3. Étude de la limite de la suite de terme général I_n.

a. Établir que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;2]$, on a : $0 \leq \dfrac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leq \dfrac{\mathrm{e}}{x^n}$.

b. En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n).

CORRECTION

EXERCICE 1

1. Réponse ***a***

$\overrightarrow{GB}$ a pour coordonnées (– 1 ; – 1 ; 1) donc GB = $\sqrt{3}$,

$\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées (– 1 ; 1 ; 1) donc BI = $\sqrt{3}$,

GI = 2, le triangle GBI est isocèle en B

2. Réponse ***c***

Le barycentre du système de points pondérés {(O, 2), (A, – 1), (C, 1)} est le point M tel que $2\,\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OJ}$ donc M = J

3. Réponse ***b***

$\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées (– 1 ; 1 ; 1)

$\overrightarrow{FC}$ a pour coordonnées (0 ; 0 ; – 1) donc $\overrightarrow{AH}\,.\,\overrightarrow{FC} = -1\times 0 + 1\times 0 + (-1)\times 1 = -1$

4. Réponse ***b***

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HI}$ donc les points B, C, I, H forment un parallélogramme.

BI = $\sqrt{3}$ et CH = $\sqrt{3}$ donc les diagonales ont la même longueur donc les points B, C, I, H forment un rectangle.

BC = 1 et BH = $\sqrt{2}$, le quadrilatère BCIH n'est pas un carré.

5. Réponse ***c***.

$\overrightarrow{EK}$ a pour coordonnées (– 1 ; 1 ; – 1) et est un vecteur directeur de (EK) donc une représentation paramétrique de paramètre *t* de la droite (KE) est $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$

6. Réponse ***c***

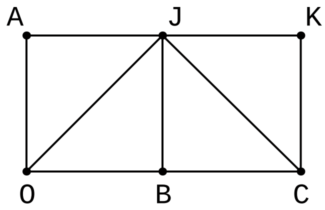
K n'appartient ni au plan de la réponse *a*, ni à celui de la réponse *b* donc Réponse ***c*** juste.

7. Réponse ***a***

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{JH}$ donc J appartient au plan (ADH)

(HJ) est perpendiculaire au plan (ACK) donc à toute droite de ce plan donc la droite (CJ) est perpendiculaire à (HJ).

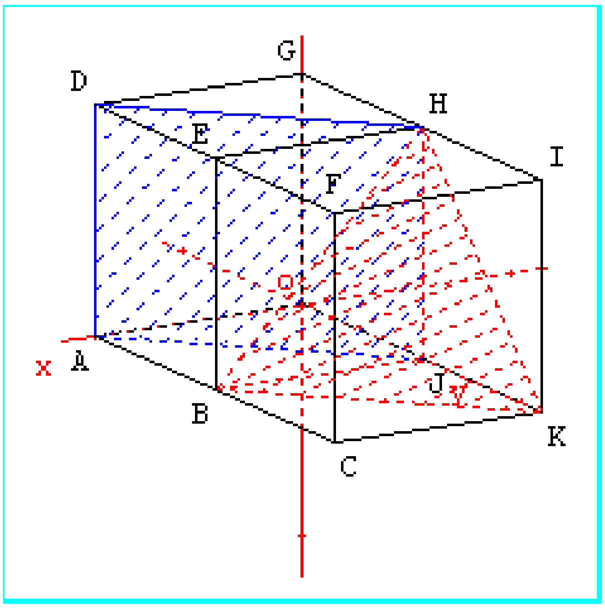
la droite (CJ) est perpendiculaire à (AJ) donc au plan qui contient les droites (AJ) et (HJ) : le plan (AJH) = (ADH) et J est la projection orthogonale de C sur ce plan donc la distance du point C au plan (ADH) est CJ = $\sqrt{2}$.



8. Réponse ***b***

Le volume du tétraèdre HJKB est égal à $\frac{1}{3}\times A_{BKJ}\times HJ$

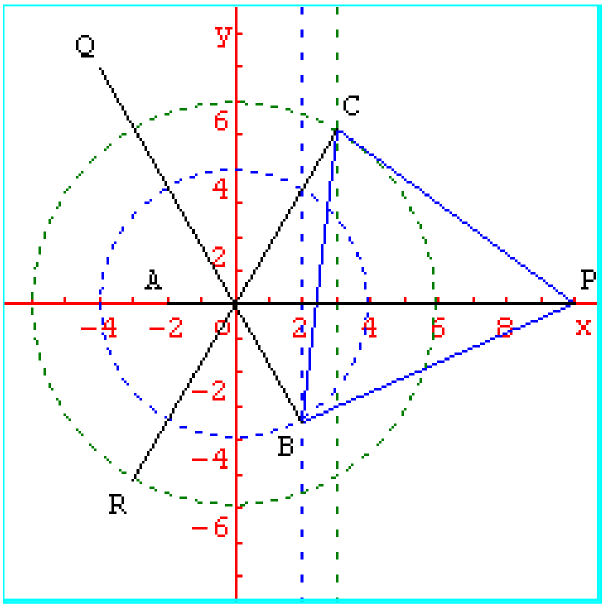
soit $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times BJ\times JK\times HJ = \frac{1}{6}$



EXERCICE 2

PARTIE A Étude de la configuration

1. ***a.***



b. $| b |^2 = 4 + 4 \times 3 = 16$ donc $| b | = 4$

$| c |^2 = 9 + 9 \times 3 = 36$ donc $| c | = 6$

c. $| b | = 4$ donc OB = 4, B est le point d'abscisse 2 et d'ordonnée négative du cercle de centre O de rayon 4

$| c | = 6$ donc OC = 6, B est le point d'abscisse 3 et d'ordonnée positive du cercle de centre O de rayon 6

2. $BC^2 = | c - b |^2 = | 1 + 5 \text{ i}\sqrt{3} |^2 = 76$

$CP^2 = | c - p |^2 = | 7 - 3 \text{ i}\sqrt{3} |^2 = 49 + 27 = 76$

$BP^2 = | b - p |^2 = | 8 + 2 \text{ i}\sqrt{3} |^2 = 64 + 12 = 76$

BP = CP = BC donc le triangle BCP est équilatéral.

3. ***a.*** $q - a = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(c - a) = \left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(5 + 3 \text{ i}\sqrt{3})$

$q + 2 = \frac{1}{2}(5 + 3 \text{ i}\sqrt{3} + 5 \text{ i}\sqrt{3} - 9)$ soit $q + 2 = -2 + 4 \text{ i}\sqrt{3}$ donc $q = -4 + 4 \text{ i}\sqrt{3}$.

b. $q = -2(2 - 2 \text{ i}\sqrt{3}) = -2b$ donc $\overrightarrow{OQ} = -2\,\overrightarrow{OB}$. Les points O, P et Q sont alignés.

4. ***a.*** Les points O, P et Q sont alignés.

A et P sont deux points de l'axe des réels donc O, P et A sont alignés.

R est le symétrique de C par rapport à O donc O, R et C sont alignés.

Les droites (AP), (BQ) et (CR) sont distinctes et ont un point commun O donc sont concourantes en O.

b. AP = 10 – (– 2) = 2

$q - b = -2b - b = 3b$ donc $| q - b | = | 3b | = 3 | b | = 12$

$CR = 2\,OC = 2 | c | = 12$ donc AP = BQ = CR.

PARTIE B

1. $f(\text{O}) = \text{OA} + \text{OB} + \text{OC} = 2 + 4 + 6 = 12$

2. la rotation r_A de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, transforme M en N donc le triangle AMN est équilatéral donc MA = MN

la rotation r_A de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, transforme C en Q et M en N donc MC = NQ.

3. $f(\text{M}) = \text{MA} + \text{MB} + \text{MC}$ or MC = NQ et MA = MN donc $f(\text{M}) = \text{MN} + \text{MB} + \text{NQ}$

$\text{MN} + \text{NQ} \geq \text{MQ}$ donc $f(\text{M}) \geq \text{MQ} + \text{MB}$

$\text{MQ} + \text{MB} \geq \text{MN}$ donc $f(\text{M}) \geq \text{BQ}$ or BQ = 12 donc $f(\text{M}) \geq 12$

EXERCICE 2 5 points Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* $\overrightarrow{BC}$ a pour affixe 10 – 5 i et $\overrightarrow{BH}$ a pour affixe 2 – i donc $\overrightarrow{BC} = 5\ \overrightarrow{BH}$ donc le point H appartient à la droite (BC).

b. $\dfrac{h}{h-c} = \dfrac{2+4\,i}{-8+4\,i} = \dfrac{2\,(1+2\,i)}{4\,(-2+i)}$

or (1 + 2 i) = – i (– 2 + i), donc $\dfrac{h}{h-c} = -\dfrac{1}{2}$ i donc arg $\dfrac{h}{h-c} = -\dfrac{\pi}{2}$ [2 π] donc $(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) = -\dfrac{\pi}{2}$ [2 π]

2. *a.* $\overrightarrow{BH}$ a pour affixe 2 – i donc BH = $\sqrt{5}$

AH = | 2 + 4 i | donc AH = $2\sqrt{5}$

$\dfrac{BH}{AH} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BA}{AC} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$, et $\dfrac{AH}{CH} = \dfrac{|2+4\,i|}{|-8-4\,i|} = \dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{80}} = \dfrac{1}{2}$.

b. $\dfrac{BH}{AH} = \dfrac{BA}{AC} = \dfrac{AH}{CH}$ donc les triangles CHA et AHB sont semblables, il existe une similitude directe S_1 qui transforme le triangle CHA en le triangle AHB.

c. Soit la similitude directe transformant A en B et C en A, cette similitude a une écriture complexe de la forme $z' = \alpha z + \beta$
$b = \alpha \times 0 + \beta$ donc $\beta = 5$ i

$0 = \alpha c + \beta$ donc $10\,\alpha + 5$ i = 0 soit $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ i

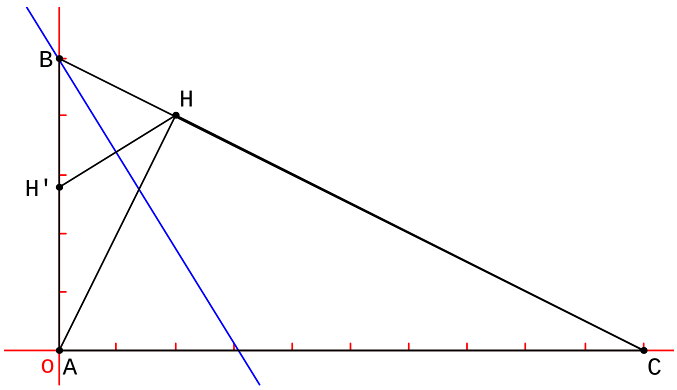
la similitude directe transformant A en B et C en A, a pour écriture complexe $z' = -\dfrac{1}{2}$ i z + 5 i.

L'image de H par cette similitude est le point d'affixe $h' = -\dfrac{1}{2}$ i (2 + 4 i) + 5 i = – i + 2 + 5 i = 2 + 4 i = h donc cette similitude transforme le triangle CHA en le triangle AHB.

la similitude directe transformant le triangle CHA en le triangle AHB, a pour écriture complexe $z' = -\dfrac{1}{2}$ i z + 5 i.

Elle a pour centre H, pour rapport $|\alpha| = \dfrac{1}{2}$ et pour angle arg $(\alpha) = -\dfrac{\pi}{2}$ [2 π]

3. S_2 a une écriture complexe de la forme $a\,\overline{z} + b$ donc est une similitude indirecte.
Toute similitude indirect du rapport k et de centre A se décompose d'une manière unique en composée commutatif d'une homothétie de h centre Ω de rapport k et d'une symétrie orthogonale s d'axe passant par Ω.
$S_2 = s \circ h = h \circ s$ alors $S_2 \circ S_2 = h \circ s \circ s \circ h = h \circ h$ (car $s \circ s$ = Id)
$S_2 \circ S_2$ a pour écriture complexe : $z' = (-1-2\,i)\,[(-1+2\,i)\,z + 10] + 10$ soit $z' = 5\,z - 20\,i$
$S_2 \circ S_2$ (B) = B donc $S_2 \circ S_2$ est l'homothétie de centre B (5 i) de rapport 5
$h \circ h$ est une homothétie de rapport k^2 et de centre Ω
donc Ω = B et $k^2 = 5$ or $k > 0$ donc $k = \sqrt{5}$ donc h est l'homothétie de centre B de rapport $\sqrt{5}$



$S_2 = h \circ s$ donc $s = h^{-1} \circ S_2$ où h^{-1} est l'homothétie de centre B (5 i) de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
S_2 (B) = B donc s(B) = h^{-1} (B) = B
s(B) = B donc B ∈ (Δ).
S_2 (H) = O donc s(H) = h^{-1} (O) = H'
H' est le point d'affixe h' telle que h' – 5 i = $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (0 – 5 i)

donc h' = $(5 - \sqrt{5})$ i et (Δ) est la médiatrice de [HH']

B appartient à (Δ) donc S_2 est la composée de la symétrie orthogonale d'axe (Δ), et de l'homothétie de centre B de rapport $\sqrt{5}$.

4. *a.* Le rapport de la similitude composée $S_2 \circ S_1$ est égal au produit des rapports donc à $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

b. L'aire du triangle CHA est $\dfrac{1}{2} \times 4 \times 10 = 20$ de plus l'aire du triangle BAC est $\dfrac{1}{2} \times 5 \times 10 = 25$

Le rapport entre les aires des triangles CHA et BAC est $\dfrac{25}{20} = \dfrac{5}{4}$.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

1. *a.* A : « les 2^e et 3^e sondages sont positifs » ;
le premier sondage est positif donc le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif donc $p(V_2) = 0,6$
Si le deuxième sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif donc $p_{V_2}(V_3) = 0,6$

$p(V_2 \cap V_3) = p(V_2) \times p_{V_2}(V_3) = 0,6 \times 0,6$

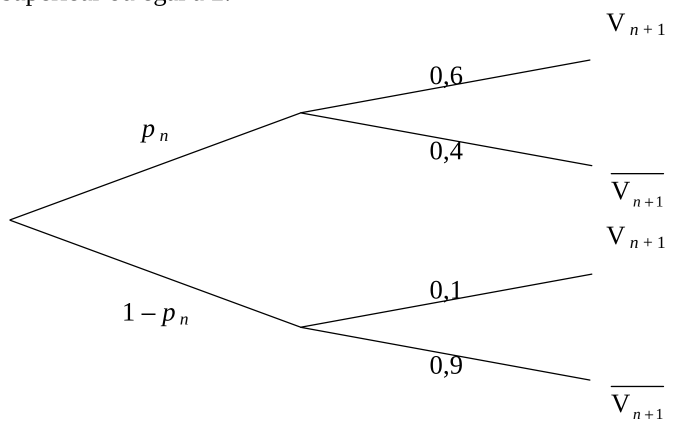
b. le premier sondage est positif donc le suivant a une probabilité égale à 0,4 d'être aussi négatif donc $p(\overline{V_2}) = 0,4$

Si le deuxième sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif. donc $p_{\overline{V_2}}(\overline{V_3}) = 0,9$

$p(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}) = p(\overline{V_2}) \times p_{\overline{V_2}}(\overline{V_3}) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$

2. $p_3 = p(V_2 \cap V_3) + p(\overline{V_2} \cap V_3) = 0,36 + 0,4 \times 0,1 = 0,4$

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.



4. Pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = p(V_{n+1}) = 0,6\, p_n + (1 - p_n) \times 0,1$.
$p_{n+1} = 0,6\, p_n + 0,1 - 0,1$ donc $p_n = 0,5\, p_n + 0,1$

5. *a.* $p_n = u_n + 0,2$ donc en remplaçant dans $p_{n+1} = 0,5\, p_n + 0,1$, on obtient $u_{n+1} + 0,2 = 0,5\,(u_n + 0,2) + 0,1$ soit $u_{n+1} = 0,5\, u_n$
u est une suite géométrique, de premier terme $u_1 = p_1 - 0,2 = 0,8$ et de raison 0,5 donc $u_n = 0,8 \times 0,5^{n-1}$.

b. $p_n = u_n + 0,2$ donc $p_n = 0,8 \times 0,5^{n-1} + 0,2$.

c. si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,2$

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. ***a.*** $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to +\infty} e^{t} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ or $\lim\limits_{t\to 0} e^{t} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

c. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe C.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe C en $+\infty$.

2. ***a.*** $f'(x) = \frac{-2}{x^3} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = -\left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) e^{\frac{1}{x}}$

donc $f'(x) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}(2x + 1)$.

b. $x > 0$ et la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) < 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$ ↘	0

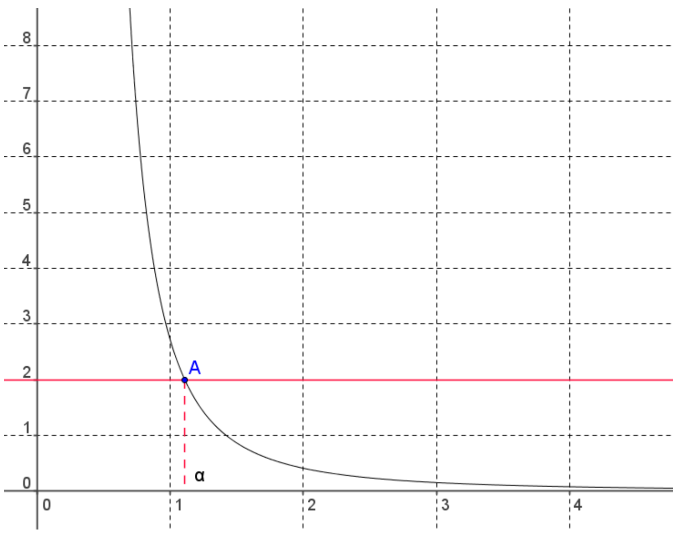
c. f est une fonction continue strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ donc $f(]0 ; +\infty[) =]0 ; +\infty[$

$2 \in]0 ; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

$f(1{,}10) \approx 2{,}05$ et $f(1{,}11) \approx 1{,}998$ donc $1{,}10 \leq \alpha \leq 1{,}11$

3.



PARTIE B Étude d'une suite d'intégrales

1. Soit $u(x) = \frac{1}{x}$ alors $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $f(x) = -u'(x)\, e^{u(x)}$

f a pour primitive la fonction F définie par $F(x) = -e^{u(x)} = -e^{\frac{1}{x}}$ donc $I_2 = F(2) - F(0) = e - e^{\frac{1}{2}} = e - \sqrt{e}$

2. ***a.*** $\frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ donc soit $u'(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ $u(x) = -e^{\frac{1}{x}}$ et $v(x) = \frac{1}{x^{n-1}}$ $v'(x) = -\frac{n-1}{x^n}$

donc $I_{n+1} = \left[-\frac{1}{x^{n-1}} e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - \int_1^2 (n-1)\frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}}\, dx$

$\text{I}_{n+1} = -\dfrac{\sqrt{\text{e}}}{2^{n-1}} - (-\text{e}) - (n-1)\displaystyle\int_1^2 \dfrac{1}{x^n}\,\text{e}^{\frac{1}{x}}\,\text{d}x$ soit $\text{I}_{n+1} = \text{e} - \dfrac{\sqrt{\text{e}}}{2^{n-1}} + (1-n)\,\text{I}_n$.

b. En appliquant la formule de récurrence à $n = 2$, $\text{I}_3 = \text{e} - \dfrac{\sqrt{\text{e}}}{2} - \text{I}_2$ soit $\text{I}_3 = \text{e} - \dfrac{\sqrt{\text{e}}}{2} - \text{e} + \sqrt{\text{e}}$ donc $\text{I}_3 = \dfrac{\sqrt{\text{e}}}{2}$

3. ***a.*** Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [1 ; 2], on a : $1 \leq x \leq 2$ donc $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{x} \leq 1$, la fonction exponentielle étant croissante et positive sur R, $0 \leq \text{e}^{\frac{1}{x}} \leq \text{e}^1$

$x \in [1\,;\,2]$ donc $x^n > 0$ donc $0 \leq \dfrac{1}{x^n}\,\text{e}^{\frac{1}{x}} \leq \dfrac{\text{e}}{x^n}$.

b. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [1 ; 2], $0 \leq \dfrac{1}{x^n}\,\text{e}^{\frac{1}{x}} \leq \dfrac{\text{e}}{x^n}$ donc $0 \leq \text{I}_n \leq \displaystyle\int_1^2 \dfrac{1}{x^n}\,\text{e}\,\text{d}x$

soit $0 \leq \text{I}_n \leq \left[-\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}\right]_1^2$ donc $0 \leq \text{I}_n \leq -\dfrac{1}{(n-1)\times 2^{n-1}} + \dfrac{1}{n-1}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{n-1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n-1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{(n-1)\times 2^{n-1}} + \dfrac{1}{n-1} = 0$

d'après le théorème des gendarmes, I_n étant compris entre 0 et un terme qui tend vers 0, tend lui-même vers 0, $\lim\limits_{n \to +\infty} \text{I}_n = 0$