Centres étrangers juin 2005

I. Première partie

On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(1 + x) - x$ et $g(x) = \ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2}$.

1. Étudier les variations de f et de g sur $[0 ; +\infty[$.

2. En déduire que pour tout $x > 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \le \ln(1 + x) \le x$.

II. Deuxième partie

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par : $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = u_n\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$.

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \ge 1$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \ge 1$: $\ln u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$

3. On pose : $S_n = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}$ et $T_n = \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4^2}+\ldots+\dfrac{1}{4^n}$

A l'aide de la première partie montrer que : $S_n - \dfrac{1}{2}T_n \le \ln u_n \le S_n$.

4. Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

5. Etude la convergence de la suite (u_n).

a. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b. En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.

c. On admet le résultat suivant : si deux suite (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \le w_n$ pour tout entier naturel, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Montrer alors que $\dfrac{5}{6} \le \ln \ell \le 1$ et en déduire un encadrement de ℓ.

CORRECTION

I. Première partie

1. f et g sont définies continues dérivables sur $[0 ; +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}$, et $g'(x) = \dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}$

$x \ge 0$ donc $f'(x) \le 0$ et $g'(x) \ge 0$ donc f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$ et g croissante sur $[0 ; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 $-$	
f	0 $\searrow$	

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
g	0 $\nearrow$		

2. f et g sont décroissantes sur $[0 ; +\infty[$ et $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$ donc pour tout $x > 0$, $f(x) \le f(0)$ et $g(x) \ge g(0)$

soit $\ln(1 + x) - x \le 0$ et $\ln(1+ x) - x + \dfrac{x^2}{2} \ge 0$ donc $\ln(1 + x) \le x$ et $\ln(1 + x) \ge x - \dfrac{x^2}{2}$ soit pour tout $x > 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \le \ln(1 + x) \le x$.

II. Deuxième partie

1. $u_1 = \dfrac{3}{2}$ donc $u_1 > 0$, la propriété est vraie pour $n = 1$

Montrons que pour tout $n \ge 1$, la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout $n \ge 1$, si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$

$u_{n+1} = u_n\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ donc $u_{n+1} > 0$

La propriété est vraie pour $n + 1$ donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

2. $u_1 = \dfrac{3}{2}$ donc $\ln u_1 = \ln\dfrac{3}{2} = \ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)$ la propriété est vraie pour $n = 1$

Montrons que pour tout $n \ge 1$, la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout $n \ge 1$, si

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \text{ alors } \ln u_{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$u_{n+1} = u_n\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ donc $\ln u_{n+1} = \ln\left[u_n\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)\right]$ donc $u_n > 0$ on a : $\ln u_{n+1} = \ln u_n + \ln\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$

$\ln u_{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

La propriété est vraie pour $n + 1$ donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

3. pour tout $x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$, on choisit successivement $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}$ et on remplace dans l'inégalité, en utilisant systématiquement que $(2^p)^2 = 2^{2p} = (2^2)^p = 4^p$ on obtient donc :

si $x = \frac{1}{2}$ alors $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\times 2^2} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\times 4} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$

si $x = \frac{1}{2^2}$ alors $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2\times (2^2)^2} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) \leq \frac{1}{2^2}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2\times 4^2} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) \leq \frac{1}{2^2}$

si $x = \frac{1}{2^3}$ alors $\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2\times (2^3)^2} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^3}\right) \leq \frac{1}{2^3}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2\times 4^3} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^3}\right) \leq \frac{1}{2^3}$ etc…

etc …

si $x = \frac{1}{2^n}$ alors $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2\times (2^n)^2} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2\times 4^n} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$

En additionnant terme à terme les inégalités obtenues on arrive à :

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}\right) \leq \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ soit $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$.

4. Si $q \neq 1$: $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$S_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ S_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $q = \frac{1}{2}$

donc $S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)$ soit $S_n = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$T_n = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)$ T_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{4}$ et de raison $q = \frac{1}{4}$

donc $T_n = \frac{1}{4}\times\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)$ soit $T_n = \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{3}$

5. *a.* $u_{n+1} - u_n = u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) - u_n = \frac{1}{2^{n+1}}u_n$. Pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite (u_n) est strictement croissante.

b. Pour tout $n \geq 1$, $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$.

S_n est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$ donc $S_n \leq 1$ donc pour tout $n \geq 1$, $\ln u_n \leq 1$ soit $u_n \leq e$

(u_n) est croissante majorée par e donc converge vers une limite ℓ telle que $u_0 \leq \ell \leq e$

c. (u_n) converge vers ℓ avec $0 < \ell \leq e$ et la fonction ln est continue sur $]0 ; +\infty[$ donc $(\ln u_n)$ est convergente.

D'après le résultat admis, comme pour tout $n \geq 1$, $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{3}$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_n - \frac{1}{2}T_n\right) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ donc $1 - \frac{1}{6} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n \leq \frac{1}{3}$ soit $\frac{5}{6} \leq \ln \ell \leq 1$ donc $e^{\frac{5}{6}} \leq \ell \leq e$