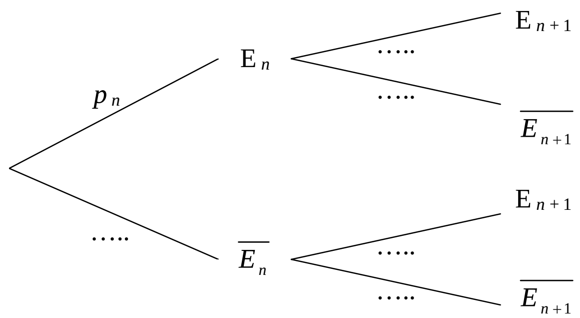
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.
• Un salarié malade est absent
• La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
• Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine
$n + 1$ avec une probabilité égale à 0,04.
• Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,24.
On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n \leq 1$.
1. *a*. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
2. *a*. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous :



b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0{,}2\, p_n + 0{,}04$.
c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0{,}05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.
d. En déduire la limite de la suite (p_n).
e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que P < $0{,}05 - 10^{-K}$ P prend la valeur 0,2 × P + 0,04 J prend la valeur J + 1 Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0{,}05$.
On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.
a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.
b. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\frac{X - \mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

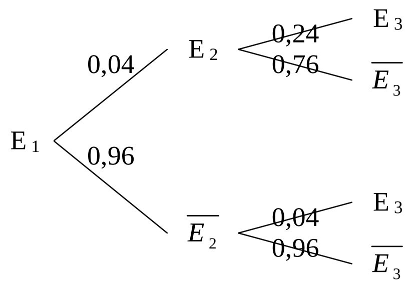
x	– 1,55	– 1,24	– 0,93	– 0,62	– 0,31
$P(Z \leq x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379

x	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z \leq x)$	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question *b*., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

CORRECTION

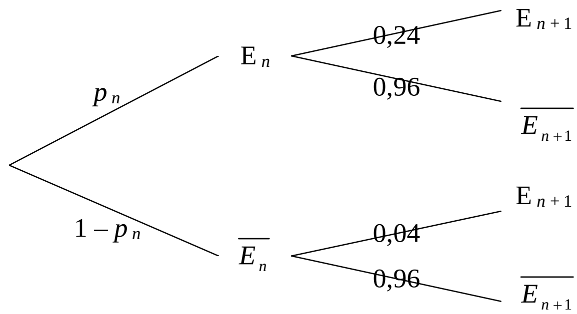
1. *a*.



$p_3 = p(E_3) = 0{,}04 \times 0{,}24 + 0{,}96 \times 0{,}04 = 0{,}048$.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine est $p = \dfrac{p(E_3 \cap E_2)}{p(E_3)} = \dfrac{0{,}04 \times 0{,}24}{0{,}048} = 0{,}2$

2. *a*.



b. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = p(E_{n+1} \cap E_n) + p(E_{n+1} \cap \overline{E_n}) = 0{,}24\, p_n + (1 - p_n) \times 0{,}04$
$p_{n+1} = 0{,}24\, p_n + 0{,}04 - 0{,}04\, p_n$ donc $p_{n+1} = 0{,}2\, p_n + 0{,}04$.

c. $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}05 = 0{,}2\, p_n + 0{,}04 - 0{,}05$
$u_{n+1} = 0{,}2\, p_n - 0{,}01 = 0{,}2\, (p_n - 0{,}05)$
$u_{n+1} = 0{,}2\, u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 0 - 0{,}05 = -0{,}05$ et de raison $r = 0{,}2$
$u_n = u_1\, r^{n-1}$ donc $u_n = -0{,}05 \times 0{,}2^{n-1}$
$p_n = u_n + 0{,}05$ donc $p_n = 0{,}05 - 0{,}05 \times 0{,}2^{n-1}$ soit $p_n = 0{,}05\, (1 - 0{,}2^{n-1})$

d. $-1 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}05$

e. En faisant tourner l'algorithme, pour toutes les valeurs de $P < 0{,}05 - 10^{-k}$, J augmente de 1 donc J est un compteur.
L'affichage final J est la valeur de l'indice n tel que $p_n > 0{,}05 - 10^{-k}$
$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}05$ donc quelque soit K, il existe un indice n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors $p_n \geq 0{,}05 - 10^{-K}$ donc cet algorithme s'arrête.

3. *a*. On a une succession de 220 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a 2 issues,

- succès : le salarié est malade une semaine donnée ($p = 0{,}05$)
- échec : le salarié n'est pas malade une semaine donnée ($q = 1 - p$
  $q = 0{,}95$)

donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée suit une loi binomiale de paramètres (220 ; 0,05).

$\mu = E(X) = 220 \times 0{,}05 = 11$ et $\sigma(X) = \sqrt{220 \times 0{,}05 \times 0{,}95} \approx 3{,}23$

b. $P(7 \leq X \leq 15) = P\left(\dfrac{7 - 11}{3{,}23} \leq Z \leq \dfrac{15 - 11}{3{,}23}\right) = P(-1{,}24 \leq Z \leq 1{,}24) = 2\, P(Z \leq 1{,}24) - 1 = 2 \times 0{,}892 - 1 = 0{,}784$ soit 0,78 à 10^{-2} près.