Soit f la similitude d'expression complexe : $z' = \dfrac{4+3\text{i}}{5}\,\bar{z} + 1$

1. Déterminer le rapport k de la similitude f

2\. *a*. Démontrer que $f \circ f$ est une translation dont on précisera le vecteur $\vec{w}$

b. En déduire que f n'admet pas de point fixe

3\. Soit t la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\vec{w}$. Démontrer que $f = t \circ s$, où s est une symétrie axiale dont on précisera l'axe.

CORRECTION

Soit f la similitude d'expression complexe : $z' = \dfrac{4+3\text{i}}{5}\,\bar{z} + 1$

1\. L'écriture complexe de f est de la forme $z' = a\,\bar{z} + b$ donc f est une similitude indirecte de rapport $k = |\,a\,| = \left|\dfrac{4+3\text{i}}{5}\right| = 1$

2\. *a*. Par f, le point M d'affixe z est transformé en M_1 d'affixe $z_1 = \dfrac{4+3\text{i}}{5}\,\bar{z} + 1$

Par f, le point M_1 d'affixe z_1 est transformé en M' d'affixe $z' = \dfrac{4+3\text{i}}{5}\,\overline{z_1} + 1$

L'écriture complexe de f o f est $z' = \dfrac{4+3\text{i}}{5}\overline{\left(\dfrac{4+3\text{i}}{5}\bar{z}+1\right)} + 1 = \dfrac{4+3\text{i}}{5}\left(\dfrac{4-3\text{i}}{5}z+1\right) + 1 = z + \dfrac{4+3\text{i}}{5} + 1$

Donc $z' = z + \dfrac{9+3\text{i}}{5}$ donc $f \circ f$ est une translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $\dfrac{9+3\text{i}}{5}$.

b. Si f admet un point fixe A, alors f(A) = A donc f o f(A) = f(A) = A ce qui est impossible puisque f o f est une translation de vecteur non nul donc f n'admet pas de point fixe.

3\. Soit t la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\vec{w}$. Démontrer que $f = t \circ s$, où s est une symétrie axiale dont on précisera l'axe.

t^{-1} est la translation de vecteur $-\dfrac{1}{2}\vec{w}$.

Par f, le point M d'affixe z est transformé en M_1 d'affixe $z_1 = \dfrac{4+3\text{i}}{5}\,\bar{z} + 1$

Par t^{-1}, le point M_1 d'affixe z_1 est transformé en M' d'affixe $z' = z_1 - \dfrac{9+3\text{i}}{5} = \dfrac{4+3\text{i}}{5}\,\bar{z} + 1 - \dfrac{9+3\text{i}}{10}$

donc $z' = \dfrac{4+3\text{i}}{5}\,\bar{z} + \dfrac{1-3\text{i}}{10}$ donc soit $g = t^{-1}$ o f ; g est la similitude d'écriture complexe : $z' = \dfrac{4+3\text{i}}{5}\,\bar{z} + \dfrac{1-3\text{i}}{10}$.

L'écriture complexe de g est de la forme $z' = a\,\bar{z} + b$ donc g est une similitude indirecte de rapport $k = |\,a\,| = \left|\dfrac{4+3\text{i}}{5}\right| = 1$ donc est une isométrie.

g o g a pour écriture complexe : $z' = \dfrac{4+3\text{i}}{5}\overline{\left(\dfrac{4+3\text{i}}{5}\bar{z}+\dfrac{1-3\text{i}}{10}\right)} + \dfrac{1-3\text{i}}{10} = \dfrac{4+3\text{i}}{5}\left(\dfrac{4-3\text{i}}{5}z+\dfrac{1+3\text{i}}{10}\right) + \dfrac{1-3\text{i}}{10}$

$z' = z + \dfrac{4+3\text{i}}{5}\times\left(\dfrac{1+3\text{i}}{10}\right) + \dfrac{1-3\text{i}}{10} = z$ donc g est une symétrie axiale.

On pouvait aussi montrer que t^{-1} o $f = f$ o t^{-1} (vérifier avec l'écriture complexe) et en déduire que g o $g = t^{-1}$ o f o f o t^{-1}
g o $g = t^{-1}$ o T o t^{-1}

T est la translation de vecteur $\vec{w}$ et t^{-1} est la translation de vecteur $-\dfrac{1}{2}\vec{w}$ donc t^{-1} o f o f o t^{-1} = Id et g o g = Id donc est une symétrie axiale.

Cherchons les points invariants par g : g(M) = M $\Leftrightarrow z = = \dfrac{4+3\text{i}}{5}\,\bar{z} + \dfrac{1-3\text{i}}{10}$.

En posant $z = x + \text{i}\,y$ avec x et y réels on a : $10\,(x + \text{i}\,y) = 2\,(4 + 3\,\text{i})\,(x - \text{i}\,y) + (1 - 3\,\text{i})$
Soit $10\,x + 10\,\text{i}\,y = (8\,x + 6\,y + 1) + \text{i}\,(-8\,y + 6\,x - 3)$

En égalant les parties réelles et imaginaires, on obtient : $\begin{cases} 10\,x = 8\,x + 6\,y + 1 \\ 10\,y = -8\,y + 6\,x - 3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2\,x - 6\,y - 1 = 0 \\ 6\,x - 18\,y - 3 = 0 \end{cases}$ soit $2\,x - 6\,y - 1 = 0$.

g admet donc la symétrie axiale d'axe la droite d'équation $2\,x - 6\,y - 1 = 0$.